CONTENIDO

Mensaje al estudiante
Agradecimiento
Prólogo
Simbología

Capítulo 1 1
Introducción 1
1.1. Movimiento rectilíneo o curvilíneo de partículas. 1
1.2. Movimiento curvilíneos de partículas (Métodos vectoriales) 1
1.3. Vectores de posición, velocidad y aceleración.. 1
1.3.1. Sacudida o tirón 3
1.4. Componentes rectangulares de los vectores de posición, velocidad y aceleración 4
1.5. Componentes tangenciales y normales de la aceleración..... 23
1.6. Componente radial y transversal de la velocidad y aceleración de una partícula 25
1.7. Movimiento curvilíneo de una partícula en el espacio: 28
a) Coordenadas cilíndricas 28
b) Planos osculados y vector binormal 28
1.8. Otra forma de analizar el movimiento de una partícula tanto en el plano como en el espacio. 30
1) Coordenadas polares ($r - \theta$) 30
2) Componentes normales y tangenciales (n - t). 32
3) Sacudida en componentes (n - t)..... 33
1.9. Movimiento relativo a un sistema de referencia en movimiento de traslación 54

Capítulo 2 61
2.1. Cinética de partículas - Leyes de Newton del movimiento..... 61
2.2. Diferencias entre masa y peso 63
2.3. Ecuación de movimiento 63
2.3.1. Coordenadas rectangulares 64
2.3.2. Coordenadas normal y tangencial 64
2.3.3. Coordenadas radial y transversal 65
2.3.4. Coordenadas cilíndricas..... 66
2.4. Movimientos absolutos de bloques con poleas. Expresión general para el cálculo de la aceleración de varios cuerpos unidos por cuerdas 84
2.5. Movimiento en un medio resistente que depende de la velocidad de la partícula - velocidad límite o terminal..... 97
2.6. Cantidad de movimiento lineal de una partícula- Rapidez de cambio de la cantidad de movimiento line..... 112
2.7. Cantidad de movimiento angular de una partícula o momento de la cantidad de movimiento lineal..... 112

2.7.1 Rapidez de cambio de la cantidad de movimiento angular..... 114
2.8. Movimiento bajo acción de una fuerza central.. 115

Capítulo 3 125

Cinética de partículas-Método del trabajo y la energía 125
3.1 Trabajo de una fuerza..... 125
3.1.1 Trabajo realizado por el peso $\overline{W}$ 126
3.1.2 Trabajo de la fuerza ejercida por un resorte lineal..... 127
3.2. Energía cinética de una partícula-principio del trabajo y la energía..... 128
3.3. Potencia y eficiencia o rendimiento..... 130
3.4. Energía potencial..... 142
3.5. Fuerzas conservativas..... 144
3.7. Principio del impulso y la cantidad de movimiento lineal 158
3.7.1 Movimiento de impulsión..... 160
3.8 Principios del impulso y la cantidad de movimiento angular 160

Capítulo 4 Cinemática de los cuerpos rígidos 175
4.1. Introducción-Movimiento plano de un cuerpo rígido 175
4.2. Traslación de un cuerpo rígido 175
4.3. Rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo..... 177
4.4. Ecuaciones cinemáticas que definen la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo 180
4.5. Movimiento plano en general..... 190
4.6. Velocidad absoluta y relativa en el movimiento plano. (Análisis de velocidades)..... 191
4.7. Centro instantáneo de rotación en el movimiento plano..... 194
4.7.1 Localización del centro instantáneo (C.I)..... 195
4.7.2 Centro instantáneo para el rodamiento perfecto de un disico a lo largo de una línea recta o curva fija 196
4.8. Aceleracción absoluta y relativa en el movimiento general en un plano 214

Capítulo 5 231
5.1. Aplicación de las Leyes de Newton al movimiento de un sistema de partículas. fuerzas efectivas 231
5.2. Movimiento del centro de masa de un sistema de partículas 232
5.3. Momento de las fuerzas aplicadas sobre un sistema de partículas 233
5.4. Cantidad de movimiento lineal y angular de un sistema de partículas 234

5.5. Cálculo de la cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas con respecto a un origen inercial 236
5.6. Cinética de los cuerpos rígidos con movimiento en un plano 246
5.6.1. Introducción 246
5.6.2. Momento de inercia de una masa respecto a un eje 246
5.6.3. Ecuaciones del movimiento de un cuerpo rígido 247
5.6.4. Cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido que se mueve en un plano 248
5.7. Traslación pura de un cuerpo rígido 249
5.8. Rotación pura de un cuerpo rígido..... 263
a) Rotación centroidal 263
b) Rotación no centroidal o excentroidal 264
5.9. Movimiento plano general de un cuerpo rígido.. 274
5.9.1. Movimiento de rodadura 274

Capítulo 6 – Vibraciónes Mecánicas 290
6.1. Aspectos generales 290
6.2. Movimiento armónico simple (M.A.S.) 292
6.3. Vibraciónes libres sin amortiguamiento 294
6.4. Péndulo simple (Solución aproximada)..... 297
6.5. Composición de resortes-Resorte equivalente... 298
6.6. Vibraciones libres de cuerpos rígidos 311
6.7. Aplicación del principio de conservación de la energía 322
6.8. Vibraciónes forzadas sin amortiguamiento 329
6.8.a. Vibración forzada sin amortiguamiento cuando la fuerza externa es constante $P(t) = P_o$ 329
6.8.b. Vibración forzada sin amortiguamiento cuando la fuerza externa es armónica $P(t) = P_o \operatorname{sen} \omega.t$ 330
6.8.c. Vibración forzada sin amortiguamiento cuando la fuerza externa es periódica 334
6.9. Vibraciones libres amortiguadas 340
6.9.1. Amortiguamiento viscoso 340
1) Sistema sobreamortiguado. $c > Ccr$ 342
2) Sistema críticamente amortiguado $C = Ccr$ 343
3) Sistema subamortiguado $C < Ccr$ 343
6.10. Vibraciones forzadas amortiguadas 348

Apéndices 359
Apéndice A..... 360
A.1. Derivadas de las funciones vectoriales..... 360
A.2. Elementos de geometría diferencial-Vector posición en función de s, curvatura y radio de curvatura 362
A.3. Expresiones para el radio de curvatura de curvas planas 363

A.4. Elementos de Geometría analítica-Diferencia entre coeficiente angular y pendiente:
a) En ejes oblicuos
b) En ejes ortogonales 366
A.5. Condición de otorgonalidad:
a) En ejes oblicuos
b) En ejes otorgonales o perpendiculares 367
A.6. Expresión de la serie de Maclaurin 368

Apéndice B
B.1. Resortes inclinados. Análisis sobre la influencia del campo gravitatorio 372
B.1.1. Movimiento vertical de una plataforma suspendida por cuatro resortes inclinados 372
B.1.2. Frecuencia natural angular de la vibración lateral de una barra horizontal uniforme sostenida por resortes inclinados 379
B.1.3. Oscilación respecto a la posición α_1 386
B.1.4. Movimiento de resortes en un plano horizontal 390
B.1.5. Movimiento de un resorte en un plano inclinado 392
Problemas de aplicación 394
Apendice C. Propiedades de figuras planas y momentos de inercia de masas de sólidos homogéneos con formas geométricas usuales 399
Bibliografía 405

Sistemas de unidades.

MENSAJE AL ESTUDIANTE

Amigo estudiante: Nosotros que estamos asistiendo a la muerte lenta de este siglo, dominado, cada vez más, por la cultura de masas y la impersonalidad burocrática y donde el fracaso en asuntos comerciales está ligado al deseo de satisfacer a todas las personas, no así en los aspectos educativos; debemos sentirnos satisfechos de saber que los conceptos científicos no fueron impresos por alguna computadora (sin ser enemigo de ella) ni fueron votados por algún comité, sino que fueron creados gracias a los esfuerzos individuales y al ingenio de unos pocos seres extraordinarios que en su mayoría recibieron apoyo a sugerencias de eminentes ciudadanos que deseaban para la Humanidad un futuro de mejores perspectivas.

No olvide, amigo estudiante y posteriormente colega, que "la gloria como una sombra huye de quienes la persiguen, pero sigue los pasos de quien huye de ella; si la halaga sin mérito jamás la alcanzará; si la merece, aunque se oculte jamás lo abandonará". Busque siempre lo honorable, haga lo correcto y el aplauso de su propia conciencia representará una mayor satisfacción que las exclamaciones de millares de personas que no saben que lo merece. Recuerda siempre que es mejor ser reprobado por un sabio que aplaudido por quien no tiene comprensión, cuando aquel te señala una falta es porque supone que puedes mejorar, en cambio, cuando el ignorante te alaba, te cree semejante a él.

AGRADECIMIENTO

Mi más profundo agradecimiento a todas las personas que de una u otra forma colaboraron en la elaboración de estas "Lecciones", fundamentalmente, las orientaciones aportadas por los profesores ingenieros: Alfonso Díaz Jiménez, Julio Flores Plaza y Rafael E. Abreu Burelli.

PROLOGO

El autor de estas páginas le debe mucho a todos aquellos que han escrito sobre el tema, ya sea en un sentido o en otro. Por eso en ningún momento pretende competir académicamente con el famoso libro texto de Beer Johnston o cualquier otro; su único deseo es conseguir algo ajustado, en lo posible, al nivel de enseñanza de dichos temas (Programa de Mecánica 20) en la Universidad de Los Andes (U.L.A.).

Indudablemente las ciencias positivas se han construido tomando como fundamento la Mecánica y aun cuando en muchos temas de la Física haya sido preciso introducir nuevos conceptos y magnitudes y si bien no puede hablarse de una descripción puramente mecánica del Universo inanimado, no puede negarse tampoco que los métodos mecánicos son los que han servido de pauta hasta en las más atrevidas teorías contemporáneas.

Se hace necesario poner de manifiesto la importancia de la Mecánica en la preparación de los ingenieros jóvenes, que van a dedicarse a diversas actividades técnicas; porque este trata de aplicar las consecuencias de las leyes creadas por los físicos con el lenguaje ideado por los matemáticos.

La demanda de profesionales que ha planteado la industria se orienta preferentemente hacia aquellos jóvenes que tienen una base sólida en sus materias fundamentales.

El estudiante que pueda resolver con éxito los problemas, debe poseer una sólida comprensión de los principios fundamentales que aplique y saber atacar el mismo por varios métodos en lugar de ser experto en el empleo de un método determinado. Las cuestiones de notación plantean siempre dificultades y es prácticamente imposible establecer un sistema coherente y no ambiguo, sin que a la vez resulte en ocasiones impracticable y engorroso.

La finalidad de este apunte texto de "MECANICA RACIONAL 20", donde se desarrolla con teoría, ejemplos prácticos y problemas propuestos, todo el programa de Dinámica, es servir como material de apoyo a profesores y alumnos en esta área, así como abaratar el costo de la enseñanza, debido a lo prohibitivo de los precios de los textos importados.

Se han realizado numerosos ejemplos prácticos de manera que ayuden al alumno a la comprensión y solución de los problemas propuestos cuyo resultados se encuentran al final de cada problema, los cuales están planteados utilizando para ello unidades del sistema internacional.

Estos ejemplos prácticos, tambien tienen como finalidad, reducir el tiempo requerido para dictar los problemas básicos del curso para dedicar áquel a profundizar en cada tema

Al final se encuentra la referencia bibliográfica utilizada para su redacción, que permite ampliar los temas expuestos o estudiar aquellos otros no tratados, siendo a la vez un reconocimiento de gratitud a la deuda contraida con todos esos autores.

Los problemas propuestos se han escrito y arreglado en orden de dificultad creciente, de acuerdo a la sección correspondiente.

Espero la crítica siempre útil y constructiva de mis colegas y alumnos, dándome ánimos y nuevos bríos para seguir escribiendo en sta atmósfera tan excitante y estimulante como lo es la Dinámica.

SIMBOLOGIA

A = Area

A, B, C, D, ... = Puntos

$\bar{v}$ = Vector velocidad

v = Rapidez = constante ; v_L = velocidad límite.

v_{cm} = Velócidad del centro de masa; $\bar{v}_{A/B}$ = Vector velocidad relativa.

$\bar{a}$ = Vector aceleración

a = Constante ; $\bar{\lambda}$ = Sacudida o tirón o derivada de la aceleración en f(t).

a_{cm} = aceleración del cuerpo de masa

c_m = Centro de masa

r = Radio; $\bar{r}$ y $\bar{r}_{A/B}$ = Vector de posición de A respecto a B

$\bar{a}_{A/B}$ = vector aceleración relativa

$\bar{T}$ y $\bar{N}$ = Vector unitario en las direcciones: tangencial normal, respectivamente.

$\bar{i}_r$, $\bar{i}_\theta$ = y $\bar{k}$, = Vectores unitarios en las direcciones: radical transveral y axilar respectivamente

$\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ = vectores unitario en las direcciones de los ejes X, Y Z

l = Longitud - L = Logaritmo natural; $\bar{B}$ = Vector binormal

m = masa

f = fuerza de fricción - frecuencia natural; u = coeficiente de fricción.

g = aceleración de gravedad

U = Trabajo ; k= Constante del resorte.

T = Energia cinética.

V = Energia potencial ; η = Rendimiento o eficiencia.

E = Energia Mecánica total.

$\bar{L}$ = Vector cantidad de movimiento lineal.

$\bar{H}_o$ = Vector cantidad de movimiento angular respecto al punto O.

$\dot{\bar{H}}$ = Vector rapidez de cambio de la cantidad de movimiento angular respecto al punto O.

ρ = Densidad.

γ = Peso especifico.

k = Coeficiente de arrastre o de amortigiramiento.

$\bar{R}$ = Fuerza resistiva.

I, Ix, Iy, Iz = Momentos de inercia respecto a sus ejes.

Ic = Momento centroidal de inercia.

Ko,kx,ky = Radios de giros.

Kc = Radio de giro centroidal.

$\bar{M}$ = Momento.

$\bar{M}_o$ = Momento respecto al punto O.

O = Origen de Coordenadas.

s = longitud de arco

w_n = Frecuencia circular

$\bar{W}$ y W = Peso y carga

w = Velocidad angular

α = Aceleraciónangular.

C_I = Centroderotacióninstantáneo.

x = Elongación.

A = Amplitud.

τ = Periodo.

$\emptyset$ = Angulo de fase.

Ω = Frecuencia forzada o frecuencia circular de la carga aplicada

c = Coeficiente de amortiguamiento viscoso.

c_r = Coeficiente de amortiguamieto crítico.

β = Relación de amortiguamiento crítico.

δ_{est} = Deflexión estática.

$\bar{n} = \frac{\Omega}{w_n}$ = Relación entre la frecuencia forzada y la frecuencia circular.

W_d = Frecuencia natural circular amortiguada.

τ_d y f_d = Período y frecuencia natural amortiguados.

CAPITULO 1

Introducción.

- Mecánica
  - Estática
  - Dinámica
    - Cinemática
    - Cinética

Este curso tiene por objeto familiarizar al alumno con los conceptos básicos de la Dinámica que es la ciencia que estudia los movimientos y las fuerzas que los producen.

La dinámica está constituída por dos áreas mayores. Cinemática que estudia los movimientos de los cuerpos, independientemente de las fuerzas que los producen. Aquí los parámetros de interés son: desplazamiento, velocidad, aceleración, sacudida y tiempo. Cinética, se fundamenta en la cinemática e incluye los efectos de las fuerzas sobre las masas.

Aplicaciones: a) En análisis de estructuras móviles o fijas sometidas a cargas bruscas. b) En todo tipo de maquinaria, fenómenos de transporte, turbinas, biomécanica, viajes espaciales e investigaciones médicas y deportivas.

1.1.- Movimiento rectilíneo o curvilíneo de partículas.-

Un movimiento es rectilíneo o curvilíneo, si la trayectoria que describe una partícula es una línea recta o curva respectivamente.

1.2.- Movimiento curvilíneo de partículas - (Métodos vectoriales).

Se obtiene cuando la trayectoria descrita por la partícula es una línea curva. Este movimiento puede clasificarse en el plano (dos dimensiones) o en el espacio (tres dimensiones).

1.3.- Vectores de posición, velocidad y aceleración.-

Los aspectos físicos del movimiento curvilíneo, se estudian analizando los cambios de los vectores de posición y velocidad, cuyos efectos llegan hasta el vector aceleración.

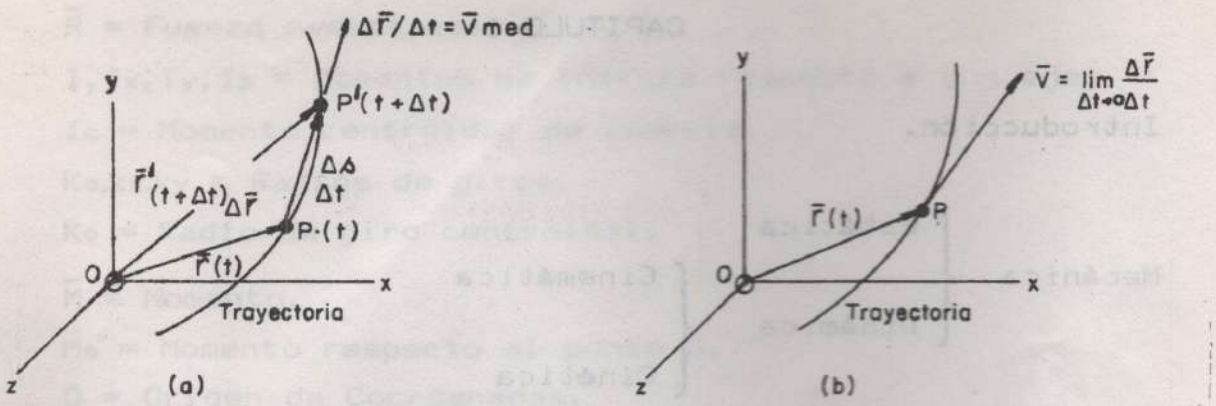


Fig: 1.1. Definición de velocidad de una prtícula.

Sean $\bar{r}$ y $\bar{r}'$ los vectores de posición en un sistema de referencia fijo de las partículas P y P', sobre la trayectoria, en los instante t y (t + Δt) Fig. 1.1a. El vector $\Delta\bar{r}$ define el cambio de posición de la partícula de P a P' y Δs representa el desplazamiento de la partícula sobre la trayectoria.

La velocidad media es igual al cociente entre $\Delta\bar{r}/\Delta t$ teniendo este vector la dirección del vector $\Delta\bar{r}$.

El vector velocidad instantánea es:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to} \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}} \qquad (1-1)$$

Este vector $\bar{v}$ es tangente a la trayectoria de la partícula en el punto considerado. Fig. 1.1b.

El vector $\bar{v}$ también se puede escribir en la forma:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \times \frac{d\bar{s}}{dt} = \bar{T}v = v\bar{T} \qquad (1-2)$$

Ver apéndice A Ec. (A-15)

Donde la magnitud v del vector $\bar{v}$ se llama rapidez de la partícula o también, en la Fig. 1.1.a,

$v = \lim_{\Delta t \to o} \frac{PP'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$. En este caso la cuerda se confunde con el arco, en el límite.

El vector aceleración se obtiene considerando dos vectores velocidad muy próximos a la trayectoria como en la Fig. 1.2.a.

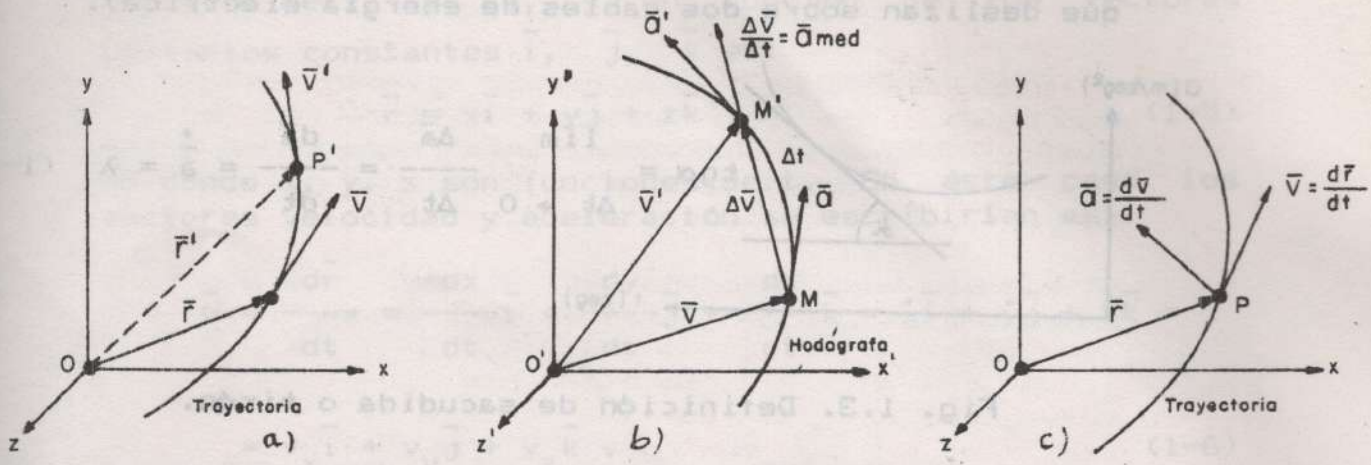


Fig. 1.2. Definición de aceleración de una partícula.

Como $\bar{v}$ y $\bar{v}$ son vectores libres o deslizantes se se pueden llevar a un nuevo sistema x'y'z'.

El vector $\Delta\bar{v}$ define el cambio del vector $\bar{v}$ a $\bar{v}'$. Fig. 1.2.b.

La aceleración media es igual al cociente entre $\Delta\bar{v}/\Delta t$, siendo su dirección la del vector $\Delta\bar{v}$.

El vector aceleración instantánea $\bar{a}$ es la razón de la variación del vector velocidad con respecto al tiempo, o sea.

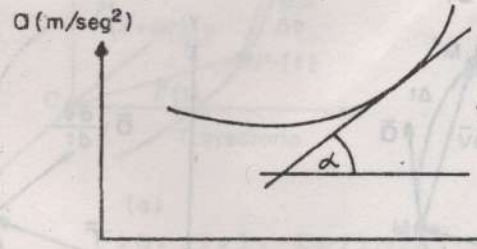
$$\bar{a} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}} \qquad (1\text{-}3)$$

La curva que contiene los extremos de los vectores velocidad es llamada HODOGRAFA.

El vector $\bar{a}$ no es tangente a la trayectoria de la partícula y si es tangente a la hodógrafa. Figs. 1.2.b.y 1.2.c.

1.3.1.- **Sacudida o Tirón.-** El cambio de la aceleración con respecto al tiempo, $\bar{a} = d\bar{a}/dt$. algunas veces conocida como sacudida o tirón, ha sido relacionado con la incomodidad en los transportes públicos.

(Arrancadas o frenadas bruscas de un trolebús). (Trolebús, vehículo que se mueve mediante dos tirantes que deslizan sobre dos cables de energía eléctrica).



$$tg\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{a}}{\Delta t} = \frac{d\bar{a}}{dt} = \dot{\bar{a}} = \bar{\lambda} \qquad (1-4)$$

Fig. 1.3. Definición de sacudida o tirón.

La sacudida en casos sencillos como al del Ejemplo 1.7. se determina sin error de signos así:

$$\lambda = \frac{a_2 - a_1}{t_2 - t_1}$$

o sea, para la recta BC.

$$\lambda = \frac{\text{ordenada de c} - \text{ordenada de B}}{\text{abcisa de c} - \text{abcisa de B}}$$

Ver Fig. b del Ejemplo 1.7.

$$\lambda = \frac{0 - 25}{25 - 20} = -5 \text{ m/seg}^3$$

1.4.- Componentes rectangulares de los vectores de posición, velocidad y aceleración.-

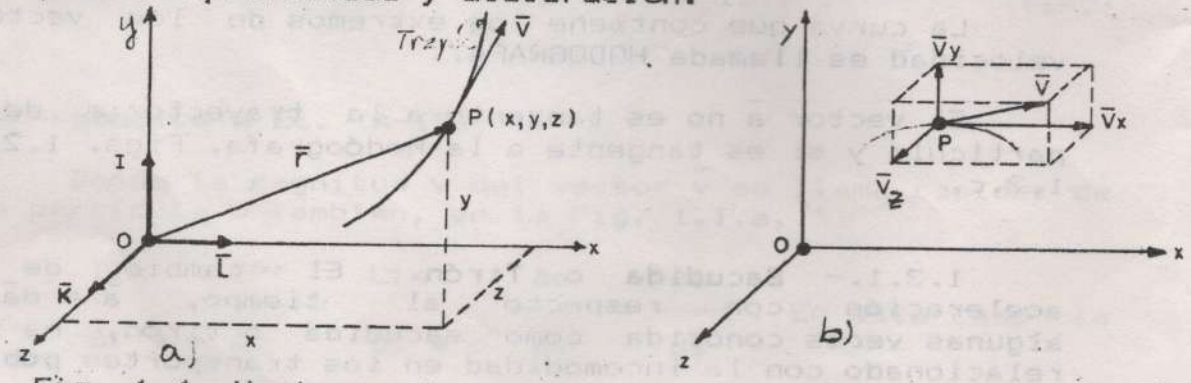


Fig. 1.4. Vectores de posición y velocidad en coordenadas rectangulares

En la Fig. 1.4.a el vector de posición $\bar{r}$, en términos de x, y, z, y en función de los vectores unitarios constantes $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ es:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \qquad (1\text{-}5)$$

en donde x, y, z son funciones de t. En éste caso los vectores velocidad y aceleración se escribirían así:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k} =$$

$$= v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k} \; . \qquad (1\text{-}6)$$

como en la Fig. 1.4.b.

Las componentes escalares del vector velocidad son:

$$v_x = \dot{x}$$

$$v_y = \dot{y}$$

$$v_z = \dot{z}$$

entonces:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(dx/dt\right)^2 + \left(dy/dt\right)^2 + \left(dz/dt\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(ds^2/dt^2\right)^2} = ds/dt \qquad (1\text{-}7)$$

$$\bar{a} = d\bar{v}/dt = \left\{(dv)_x / (dt)\right\}\bar{i} + \left\{(dv)_y / (dt)\right\}\bar{j} + \left\{(dv)_z / (dt)\right\}\bar{k} =$$

$$= \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} \qquad (1\text{-}8)$$

Las componentes escalares del vector aceleración son:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$$

$$a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$$

$$a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

entonces $a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ (1-9)

Realizando un procedimiento inverso, las componentes escalares de los vectores aceleración o velocidad pueden integrarse individualmente respecto al tiempo para obtener las componentes de la velocidad o la posición de la partícula P respectivamente.

Un ejemplo muy conocido es el del movimiento de un proyectil en las carcanías de la tierra, Fig. 1.5.

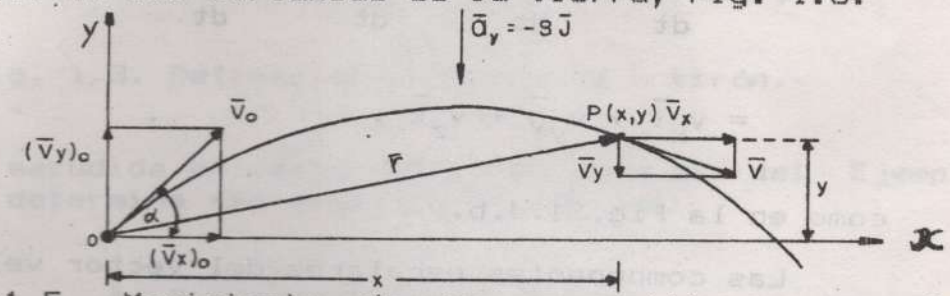


Fig. 1.5. Movimiento de un proyectil en un plano vertical

Al dispararse un proyectil que se mueve en un plano vertical, se tiene z = 0 y como consecuencia dos movimientos rectilíneo independientes:

M.R.U. : $x = vt$

M.R.U.A.: $v_2 = v_1 + at$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a\,x$$

$$x = v_1 t + 1/2\ at^2$$

a) Movimiento horizontal: $a_x = 0$

$$v_x = (v_x)_o \quad ; \quad x = (v_x)t$$

por lo tanto el movimiento de la partícula en la dirección horizontal es uniforme.

b) Movimiento vertical. $\bar{a}_y = -g\bar{j}$

$$v_y = (v_y)_o - gt \quad ; \quad y = (v_y)_o t - 1/2\ gt^2$$

el movimiento de la partícula en la dirección vertical es uniformemente acelerado.

Las ecuaciones para x, y, describen el movimiento del proyectil en un instante cualquiera, cuando el origen de coordenadas coincide con el punto de partida.

Eliminando el tiempo t, entre éstas dos ecuaciones, encontramos la ecuación de la trayectoria o sea.

$$y = \frac{(v_y)_0}{(v_x)_0} x - (1/2)g \left[\frac{x^2}{v_{x0}^2} \right] = \frac{(v_y)_0}{(v_x)_0} x - \frac{g}{2(v_x)_0^2} x^2 =$$

$$= tg\,\alpha\, x - \frac{g}{2(v_0)^2 \cos^2\alpha} x^2 \qquad (1\text{-}10)$$

que es la ecuación de una parábola de eje vertical.

La ecuación anterior no es válida cuando se tienen en cuenta la resistencia del aire, la velocidad del viento o la variación de g con la altura.

Análisis de las ecuaciones:

1) Combinando las ecuaciones del movimiento vertical, en función del tiempo y haciendo $v_y = 0$ se tiene la ecuación

$$h_{max} = \frac{(v_y)_0^2}{2g} = \frac{(v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2g}$$ que corresponde a la altura

máxima que alcanza la partícula.

2) Si en la Ec. (1-10); se hace y = 0 se obtiene x = R llamado alcance del proyectil o sea la abcisa en que la trayectoria corta nuevamente al eje de las x. Asi:

$$R=x= \frac{2(v_x)_0(v_y)_0}{g} = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}(2\alpha)}{g} \qquad (1\text{-}11)$$

3) Como R= f(α), entonces será máximo cuando sen (2α)=90° y α = 45°. De ésta manera el alcance máximo es $R_{max} = v_0^2/g$.

Ejemplo 1.1.

Una partícula parte del reposo en el origen con una aceleración constante $\bar{a} = (2\bar{i} + 8\bar{j} - 6\bar{k})$ m/seg^2 determine su posición para t = 5 seg.

Solución:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 2 \; ; \; v_x = 2t + c \text{ para } t = 0 \; ; \; v_x = 0 \; ; \; c = 0$$

$$v_x = 2t; \; v_x = \frac{dx}{dt} = 2t; \; x = t^2 + c_1 \text{ para } x=0; \; t=0; \; c_1 = 0$$

$$x = t^2 = (5)^2 = 25 \text{ m.}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 8 \; ; \; v_y = 8t + c \text{ para } t = 0; \; v_y = 0; \; c = 0$$

$$v_y = 8t; \; v_y = \frac{dy}{dt} = 8t; \; y = 4t^2 + c_2 \text{ para } y=0; \; t=0; \; c_2 = 0$$

$$y = 4t^2 = 4\,(5)^2 = 100 \text{ m}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = -6; \quad v_z = -6t = \frac{dz}{dt} \; ; \; z = -3t^2 \; ===>$$

$$z = -3(5)^2 = -75 \text{ m.}$$

$$\bar{v} = (10\bar{i} + 40\bar{j} - 30\bar{k}) \text{ m/seg.}$$

$$\bar{r} = (25\bar{i} + 100\bar{j} - 75\bar{k}) \text{ m}$$

Ejemplo 1.2.

Las coordenadas de un móvil P vienen dadas por las ecuaciones $x = \cos t - 1$ y $y = 2\operatorname{sen} t + 1$. Encontrar la velocidad máxima y mínima de P sobre la curva.

Solución:

$$\bar{r} = (\cos t - 1)\bar{i} + (2 \operatorname{sen} t + 1)\bar{j}$$

$$\bar{v} = -\operatorname{sen} t\, \bar{i} + 2 \cos t\, \bar{j}$$

$$v = |\bar{v}| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + 4 \cos^2 t} = \sqrt{1 + 3 \cos^2 t}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{-3 \cos t \cdot \operatorname{sen} t}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 t}}$$

$\cos t = 0 \Longrightarrow t = \begin{cases} \pi/2 \\ 3\pi/2 \end{cases}$ valores críticos

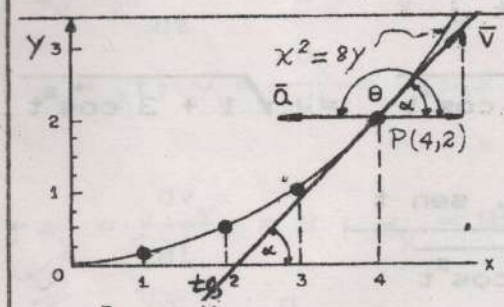
$\operatorname{sen} t = 0 \Longrightarrow t = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$

Para $t = 0$ ó π ; $v = 2$ m/seg (max)

Para $t = \pi/2$ ó $3\pi/2$; $v = 1$ m/SEG (min)

Ejemplo 1.3

Una partícula recorre el arco del primer cuadrante de la parábola $x^2 = 8y$ siendo $v_y = 2$. Encontrar $\bar{v}$, v, $\bar{a}$ y el ángulo que forman $\bar{v}$ y $\bar{a}$ con el eje de las x en el punto P (4,2).



Solución:

$2x\dot{x} = 8\dot{y}$ pero $\dot{y} = 2 = v_y$

$2(4)\dot{x} = 8(2)$

$\dot{x} = 2\text{m/seg} = v_x$

x	y
0	0
1	1/8
2	1/2
3	9/8
2	2

$v = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ m/seg

$2(\dot{x}^2 + x\ddot{x}) = 8y$ pero $\ddot{y} = a_y = 0$

$2(4 + 4a_x) = 0 \quad ===> \quad 4a_x = -4 \quad ===> \quad a_x = -1\text{m/seg}^2$

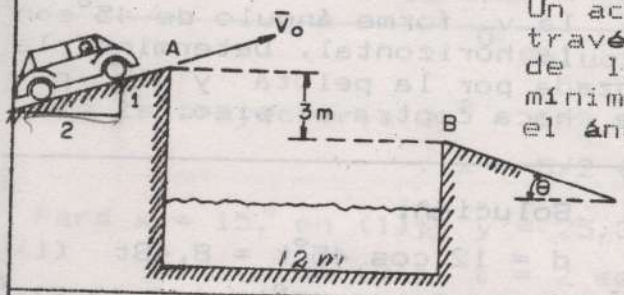
$a^2 = a_x^2 = (-1)^2 = 1 \quad ===> \quad a = 1$ m/seg

$\bar{v} = 2\bar{i} + 2\bar{j} \quad ==> \quad tg\alpha = 2/2 = 1 \quad ==> \quad \alpha = 45^\circ$ ó $2x = 8y' ==> y' = 1$

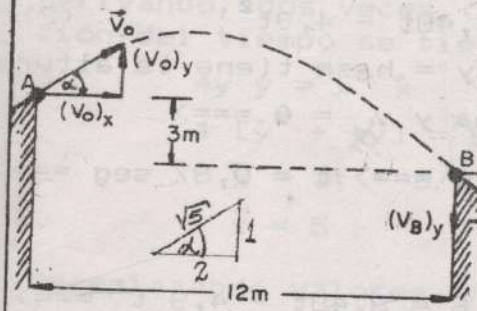
$\bar{a} = -1\bar{i}$

Ejemplo 1.4.

Un acróbata conduce un auto a través del pozo lleno de agua de la figura. Encontrar la mínima velocidad del auto y el ángulo θ de la rampa



Solución:



(1) $x = v_o \cos\alpha\, t \Rightarrow 12 = v_o (2/\sqrt{5})\, t$

(2) $y = v_o \operatorname{sen}\alpha\, t - 1/2\, g t^2 \Rightarrow$

$t = 1{,}36$ seg de A ---> B.

Reemp en (1) $v_o = 9{,}87$ m/seg

$v_o = 9{,}87$ m/seg $= 35{,}51$ kms/hora; $\alpha = 26{,}57°$

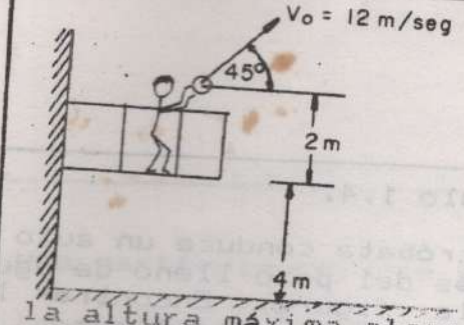
$(v_o)_x = v_o \cos\alpha = 9{,}87\ (2/\sqrt{5}) = 8{,}83$ m/seg $= (v_B)_x$

$(v_B)_y = (v_o)_y - gt = 9{,}87\ (1/\sqrt{5}) - 9{,}8\ (1{,}36) =$

$= 4{,}41 - 13{,}33 = -8{,}92$ m/seg

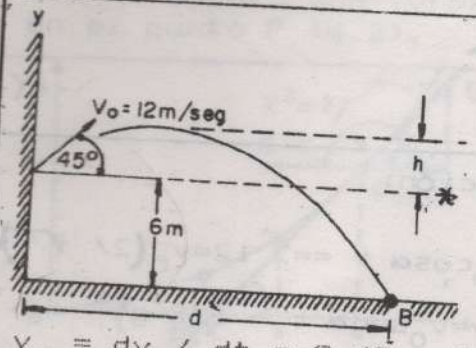
$\operatorname{tg}\theta = (v_B)_y / (v_B)_x = 8{,}92 / 8{,}83 = 1{,}01 \Rightarrow$

$\theta = 45{,}28°$



Ejemplo 1.5.

Se lanza una pelota de balon cesto desde el balcón de un edificio que está 4 metros encima del piso. El lanzamiento se hace de manera que la v_0 forme ángulo de 45° con la horizontal. Determine la altura máxima alcanzada por la pelota y la posición del lugar donde choca contra el piso.



Solución:

$d = 12 \cos 45^\circ t = 8,48t$ (1)

$y = (12 \text{ sen } 45^\circ)t - 1/2\,(9,8)t^2$

$y = 8,48t - 4,9t^2$ (2)

Para y = h se tiene la altura máxima y $v_y = 0$ ===>

$v_y = dy / dt = 8,48 - 9,8t = 0$ ===> $t = 0,87$ seg ===>

$h = 3,67$ m.

En B, $y = -6$ ===> en (2) $-6 = 8,48t - 4,9\,t^2$ ===>

$4,9t^2 - 8,48t - 6 = 0$ ==> Resolviendo, $t = 2,27$ seg

En (1) $d = 8,48\,(2,27)$ ===> $d = 19,25$ m

o con $v_y^2 = (v_y)_0^2 + 2a\,h$ para h_{max}

Ejemplo 1.6.

Una partícula está restringida a moverse hacia arriba a la derecha a lo largo de la trayectoria $2y^2 = 1/3x^3 + 160$ con x y y en cms. La coordenada x de la partícula en cualquier momento es $x = 5/2\ t^2 - 5/2\ t + 10$. Encuentre las componentes y de la velocidad y la aceleración cuando x = 15 cms.

Solución:

Sea la trayectoria $2y^2 = 1/9\ x^3 + 160$ (1) con

$$x = 5/2\ t^2 - 5/2\ t + 10 \quad (2)$$

Para x = 15, en (1); y = 25,35 cms.

En (2); t = 2 seg.

Derivando, dos veces (1) y (2) implicitamente en función del tiempo se tiene:

$$4y\dot{y} = x^2\dot{x} \quad (1')$$

$$4[\dot{y}^2 + y\ddot{y}] = 92x\dot{x}^2 + \ddot{x}x^2 \quad (1")$$

$$\dot{x} = 5t - 5/2 \quad (2')$$

$$\ddot{x} = 5 \quad (2")$$

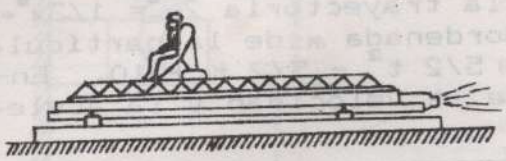
Reemplazando valores en (1'), (1"), (2') se tiene:

$\dot{x} = 7,5$ cms/seg; $\ddot{x} = 5$ cms/seg^2; $\dot{y} = 16,64$ cms/seg;

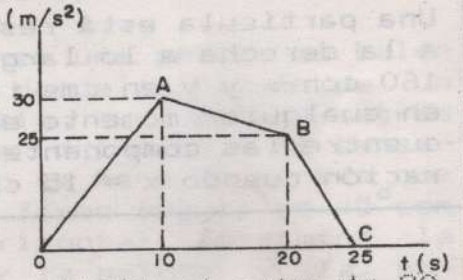
$\ddot{y} = 16,81$ cms/seg^2

Ejemplo 1.7.

Sea un trineo espacial impulsado por cohetes, el cual parte con velocidad inicial cero y su comportamiento obedece a la gráfica adjunta.



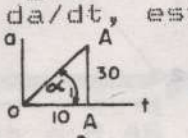
(a)



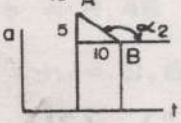
Se quiere determinar su desplazamiento al cabo de 20 segundos.

Solución:

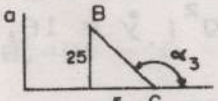
En la gráfica b, se yé que el valor mayor de la aceleración es 30 m/seg² y que existe un cambio de la aceleración con respecto al tiempo (sacudida). En los diferentes intervalos de la gráfica b, la sacudida, $\bar{\lambda} = da/dt$, está dada por:

$0 \leq t \leq 10$ 

$$\bar{\lambda}_1 = \text{tag}\alpha_1 = \frac{(30-0)}{(10-0)} = 3 \text{m/seg}^3$$

$10 \leq t \leq 20$ 

$$\bar{\lambda}_2 = \text{tag}\alpha_2 = \frac{(25-30)}{(20-10)} = -1/2 \text{m/seg}^3$$

$20 \leq t \leq 25$ 

$$\bar{\lambda}_3 = \text{tag}\alpha_3 = \frac{(0-25)}{(25-20)} = -5 \text{ m/seg}^3$$

$\bar{\lambda}_3$ se interpretaría como una frenada brusca.

Enseguida se determinará la velocidad y el desplazamiento. v será el área bajo la curva hasta los 20 seg

$$a = dv/dt \; ; \quad dv = \int a\,dt \; ; \quad v = ds/dt \; ; \quad ds = \int v\,dt$$

Se emplearan varias formas de resolver el mismo problema para comprobar la validez de su desarrollo.

Método 1:

$da/dt = \lambda_1 = 3 \Longrightarrow a = 3t$ (Recta OA)

$da/dt = \lambda_2 = -1/2 \Longrightarrow a = 35 - (1/2)t$ (Recta AB)

Para $t = 10$seg. ; $a_A = 35 - 5 = 30$ m/seg²

Continuación Ejemplo 1.7.

Para velocidades:

$0 \le t \le 10 \Rightarrow \int_0^v dv = 3\int_0^t t\,dt$; $v = (3/2)t^2$; si $t=10$

$\Rightarrow v_A = 150$ m/seg.

o también $A_1 = \dfrac{10 \times 30}{2} = 150 \Rightarrow v_A$ 150 m/seg

$10 \le t \le 20 \Rightarrow \int_{150}^{v} dv = \int_{10}^{t}(35-1/2t)dt$; $v = 35t-1/4t^2-175$

Si $t = 20$ seg $\Rightarrow v_B = 425$ m/seg $\begin{cases} A_2 = \frac{(30+25)}{2}\cdot 10 = 275 \\ v_B = 150+275 = 425 \text{ m/seg} \end{cases}$

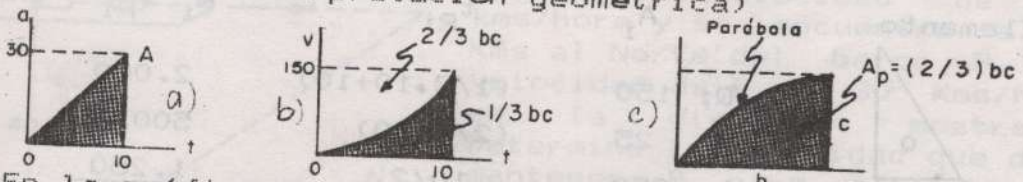
Para desplazamientos:

$0 \le t \le 10 \Rightarrow \int_0^s ds = 3/2 \int_0^{10} t^2\,dt$; $s_A = 500$ m

$10 \le t \le 20 \Rightarrow \int_{500}^{s_B} ds = \int_{10}^{20}(35t - 1/4t^2 - 175)dt$;

$s_B = 10,250 / 3 = 3.416,67$ m.

Método 2. (Interpretación geométrica)



En la gráfica b, $s_A = 1/3$ bc $= 1/3\ (10 \times 150) = 500$ m.

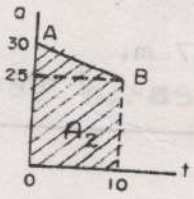
Recta AB: $a=30-(1/2)t$ para $t=10$

$a_B = 25$ m/seg^2

$v = 30t-(1/4)t^2+150$

si $t=10$, $v_B = 425$m/s

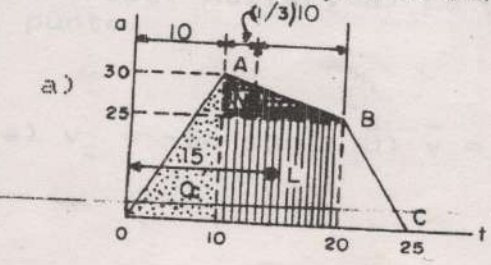
Nuevo origen

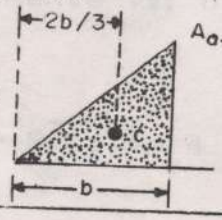


$$\int_{500}^{s_B} ds = \int_0^{10} [30t-(1/4)t^2+150]dt$$

$s_B = 10.250/3 = 3.416,67$m.

Método 3. (Interpretación física)





A_{a-t}: Area bajo la curva a-t, la cual representa velocidad.

Continuación Ejemplo 1.7.

$$Q = \frac{30 \times 10}{2} = 150;\quad N = \frac{5 \times 10}{2} = 25;\quad L = 25 \times 10 = 250$$

$d = v_0 t + (A_a - t)(t_r - \bar{t})$ con t_r = tiempo de referencia

$\bar{t}$ = centroide ; $t = 0$

$d_A = 0 + 150\ (10 - (2/3) \cdot 10) = 500$ m.

$d_B = d_A + v_A t + (A_a - t)(t_r - \bar{t})$ con t= tiempo entre A y B

$d_B = 500 + 150\ (10) + 25\ [20 - (10 + 1/3 \cdot 10)] + 250\,(20-15)$

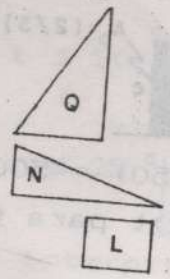
$d_B = 500 + 1.500 + 25\ (20/3) + 250\ (5) = 10.250 / 3 =$

$$d_B = 3.416{,}67 \text{ m}$$

Método 4.- (Por traslación del eje de referencia).

t_R = Eje de referencia, en este caso, localizado en

$t = 20$ seg



Elemento	A_i	t_{Ri}	$A_i\ t_{Ri}$
Q	150	(1/3.10+10)	2.000
N	25	(2/3.10)	500/3
L	250	10/2	1.250
			10.250/3

$$d_B = \Sigma\ A_i t_{Ri} = 10.250/3 = 3.416{,}67 \text{ m.}$$

Problemas / sec. (1.2; 1.3; 1.4)

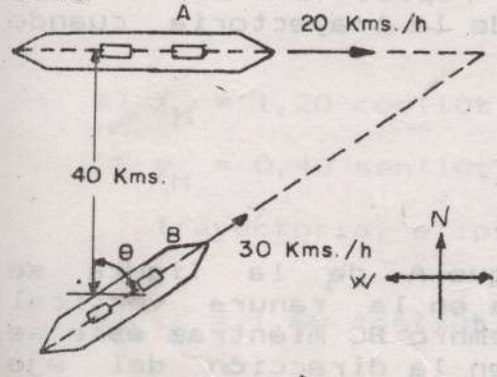
1.1.- Una partícula se mueve en el espacio según la trayectoria $x + y^2 - 2z^3 = bt^2$. Si para $t = 0$; $\bar{r} = (c\bar{i}+3\bar{j}-2\bar{k})m$; $\bar{v} = (d\bar{i}+5\bar{j}+\bar{k})m/seg$ y $\bar{a}=(10\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k})m/seg^2$ donde b, c y d son constantes, determine el valor de estas constantes.

R: $b = 12$; $c = -25$; $d = -6$

1.2.- Se deja caer una piedra en un pozo, el ruido que hace al chocar con el agua se escucha 3 segundos después; sabiendo que la velocidad del sonido en el lugar es $v_s = 20$ m/seg, calcule la profundidad (en mts) a que se encuentra la superficie del agua.

R: h = 19,60 metros.

1.3.-



El barco A se dirige al este con una velocidad de 20 kms/hora y se encuentra a 40 Kms al Norte del barco B. La velocidad de B es 30 Kms/hora en la dirección mostrada. Determine la velocidad que debe mantener B para alcanzar al barco A en el menor tiempo posible, dé el valor de dicho tiempo.

R: $t = 1,789$ horas; $\bar{v}_B = (20\bar{i} + 22,36\bar{j})$ Kms/h.

1.4.- Un punto se mueve en la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ con el plano $y = 2$. Cuando $x = 6$ la componente escalar de la velocidad sobre el eje OX es $v_x = 4$ m/seg. Hallar: a) La componente v_z; b) La rapidez del punto.

R: a) $v_z = -8$m/seg ; b) $\bar{v} = 4\bar{i} - 8\bar{k}$; $v = 4\sqrt{5}$ m/seg.

1.5.- Un punto describe la curva $y^2 = 25x$, en tal forma que la componente y del vector de posición en cualquier instante t es $5t^2\bar{j}$. Calcule la aceleración del punto cuando t = 2 seg.

R: $\bar{a} = (48\bar{i} + 10\bar{j})$ m/seg.

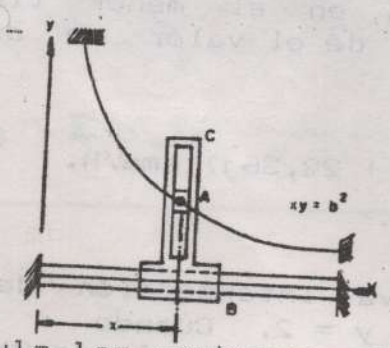
1.6.- Una partícula parte del origen en t = 0 y se mueve a lo largo del eje y positivo de la curva $x = (y^2/12) - 3$ con $v_y = 2t$ con x, y, en metros y t(seg). Determine la velocidad y aceleración de la partícula cuando y = 9 m. Además mostrar estos vectores sobre la trayectoria de la partícula.

R: v = 10,82 m/seg ; $a = 9,22$ m/seg^2.

1.7.- Las componentes rectangulares de la aceleración para una partícula son $a_x = 0,9t$ y $a_y = 9 - 3t$ con a en m/seg^2. Si la partícula parte del reposo en el origen, encontrar el radio de curvatura de la trayectoria cuando t = 2 seg.

R: $\rho = 110,17$ m.

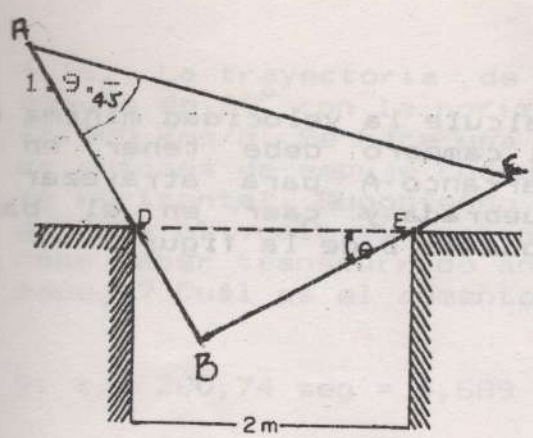
1.8.-



El bloque A de la figura se desliza en la ranura vertical del miembro BC mientras éste se mueve en la dirección del eje x. La guía curva pasa por el agujero del bloque A y obliga a éste a desplazarse verticalmente mientras BC lo hace horizontalmente. El valor de b = 40 mm.

Calcule los vectores velocidad y aceleración de A cuando $\bar{x} = 100\bar{i}$ mm, $\dot{\bar{x}} = 50\bar{i}$ mm/seg; y $\ddot{\bar{x}} = 0$

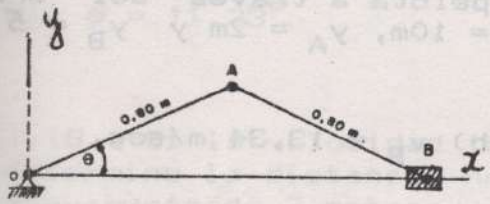
R: $\bar{v} = (50\bar{i} - 8\bar{j})$ mm/seg ; $\bar{a} = 8\bar{j}$ m/seg^2



El bloque triangular ABC se mueve en un plano vertical y sus caras AB y BC permanecen en contacto con los aristas fijas D y E respectivamente. La velocidad angular del prisma triangular es 5 rad/seg en sentido antihorario cuando tg θ = 3/4. Calcule el vector velocidad del punto B en ese instante.

R: $\bar{v} = (9,6\bar{i} - 2,8\bar{j})$ m/seg.

1.10.-



La manivela OA rota con una velocidad angular constante $w = \dot{\theta} = 10$ rad/seg. OA = AB = 0,8m. Determine: a) Las ecuaciones del movimiento y la trayectoria de una partícula M en el centro de la barra AB y b) la ecuación del movimiento del cursor B.

R: a) $x_M = 1,20 \cos(10t)$

$y_M = 0,40 \operatorname{sen}(10t)$

Trayectoria, elipse : $\dfrac{x_M^2}{1,20^2} + \dfrac{y_M^2}{0,40^2} = 1$

b) $x_B = 1,60 \cos(10t)$.

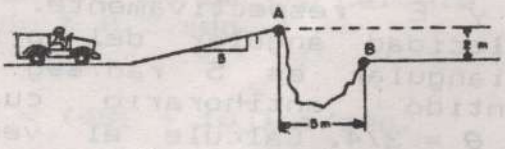
1.11.- Una bola se lanza horizontalmente desde un edificio de 70m. de altura con una velocidad de 25m/seg.

a) Calcular la distancia horizontal entre el edificio y el sitio donde la bola choca con el suelo.

b) A qué altura sobre el suelo se encuentra la bola cuando está a 75m del edificio?

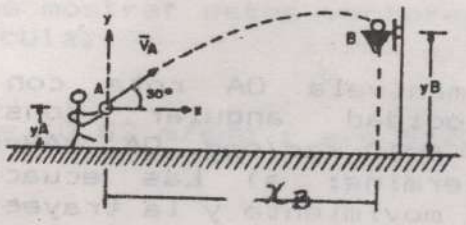
R: a) $x_2 = 95$ m ; b) $y_2 = 25,90$ m.

1.12.- Calcule la velocidad mínima que el campero debe tener en el barranco A para atravezar la quebrada y caer en el banco opuesto B de la figura.



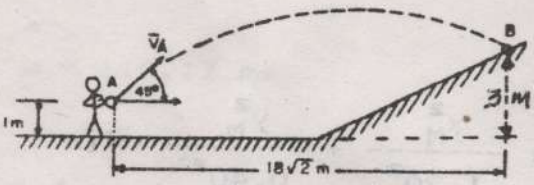
R: v = 6,54 m/seg.

1.13.- Una pelota de baloncesto se lanza desde A según un ángulo de 30° respecto a la horizontal. a) Determine la rapidez v_A a la cual se suelta la pelota para encestar en B, b) Con qué rapidez pasa la pelota a través del aro si x_B = 10m, y_A = 2m y y_B = 5 m



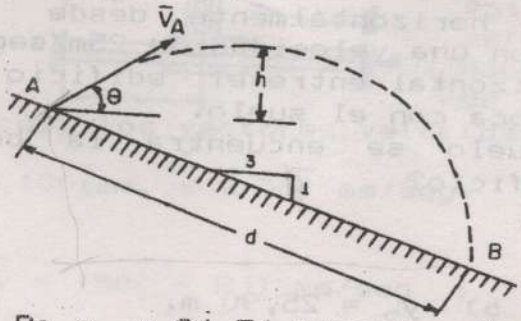
R: a) v_A = 15,40 m/seg ; b) v_B = 13,34 m/seg.

1.14.- Un muchacho en A arroja una pelota a 45° con la horizontal de tal manera que choca contra la pendiente en B. Determine la rapidez a la cual se arroja la pelota y el tiempo de vuelo.



R: v_A = 16,46 m/seg ; t = 2,187 seg.

1.15.- Una pelota se lanza desde A hasta B sobre un plano inclinado chocando con este a una distancia d = 80m. Si la pelota sube a una altura máxima h =19,6 m por encima del punto de salida, calcular la velocidad inicial y la inclinación θ.



R: v_A = 24,74 m/seg; θ = 52,41°

1.16.- La trayectoria de una onda espacial forma un ángulo de 60° con la horizontal cuando está moviendo a 16.000 Kms/h. Se hace una corrección del curso por medio de motores de empuje cuando la trayectoria forma 30° con la horizontal. Suponiendo que g = 9,14 m/seg^2, constante durante el vuelo sin potencia, qué intervalo de tiempo debe haber transcurrido antes de prender los motores de empuje? Cuál es el aumento en altura en este intervalo?.

R: t = 280,74 seg = 4,689 min ; h = 720,40 Kms.

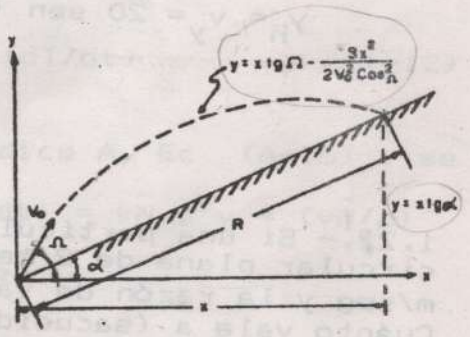
1.17.- Un cohete se suelta de un avión de guerra que vuela horizontalmente a 1800 Kms/hora y a una altura de 2.592 m. por encima de su objetivo. El empuje del cohete le da una aceleración horizontal constante de 0,6 g . Determine el ángulo entre la horizontal y la línea de vista del objetivo.

R: $\theta = 11,23°$.

1.18.- Si la velocidad inicial de un objeto es 12 m/seg, determine la distancia horizontal que puede cubrir sin elevarsemás de 3 metros.

R: x = 14,4 m

1.19.- Hallar el alcance R de un proyectil disparado contra el plano inclinado de la figura. Cuál es el valor máximo de R para una velocidad de disparo vo dada.



R: a) $$R = \frac{2 v_0^2 \cos \Omega \operatorname{sen} (\Omega - \alpha)}{g \cos^2 \alpha}$$

b) $$R_{max} = \frac{v_0^2}{g (1 + \operatorname{sen} \alpha)}$$

1.20.- Dos proyectiles son lanzados desde un mismo punto con la misma velocidad inicial y bajo ángulos diferentes (dentro del mismo plano vertical. El alcance vertical es el mismo y las duraciones del recorrido están en la relación $t_1/t_2 = \sqrt{3}/1$. Calcular los ángulos de disparos α y β.

R: $\alpha = 60°$; $\beta = 30°$.

1.21.- a) Determine las ecuaciones del movimiento y la trayectoria de un punto sobre una rueda en movimiento de radio 1 metro, si se mueve sobre una vía recta con velocidad constante de 20 m/seg. sin deslizar. Tome el origen de coordenadas en la posición inicial del punto sobre la vía. b) Determine la ecuación de la hodógrafa respecto del origen. (La hodógrafa es el lugar geométrico que reduce los problemas de acelerciones a problemas de velocidades).

R: a) $x = 20t - \text{sen}(20t)$
$y = 1 - \cos(20t)$
} E_c. paramétrica de la cicloide.

b) $x_h = v_x = 20 - 20\cos(20t)$
$y_h = v_y = 20\,\text{sen}\,(20t)$
} $\dfrac{(x_h - 20)^2}{(20)^2} + \dfrac{(y_h - 0)^2}{(20)^2} = 1$

Circunferencia de c(20,0) y radio = 20m.

1.21.- Si una partícula se mueve sobre una trayectoria circular plana de 2 metros de radio, con rapidez de 2 m/seg y la razón de variación de su rapidez es de 1 m/seg^2 Cuánto vale a (sacudida) para la partícula si la segunda derivada de su rapidez a lo largo de la trayectoria es de 4 m/seg^3 (Resuelva, usando coordenadas cilíndricas).

R: $\bar{\lambda} = \dot{\bar{a}} = -3\bar{i}_r + 2\bar{i}_\theta$

1.5.- Componentes tangenciales y normal de la aceleración.-

Algunas veces es más conveniente definir la velocidad y la aceleración de una partícula utilizando componentes en las direcciones tangencial y normal a la trayectoria de la curva. Para mayor claridad en la presentación de los conceptos se utilizará el movimiento de una partícula sobre un plano, pero ésto será válido para el movimiento en el espacio.

Movimiento curvilíneo en el plano.

a) Considerando el vector velocidad.

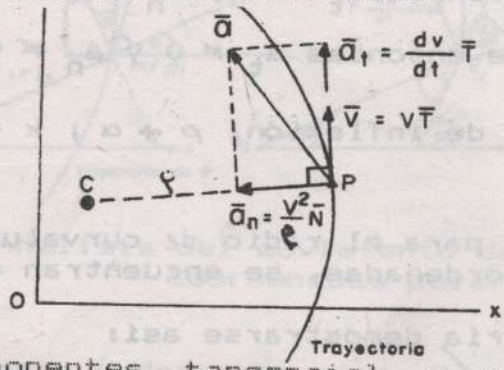


Fig. 1.6. Componentes tangencial y normal del vector aceleración

Derivando la Ec. (1-2); ($\bar{v} = v\bar{T}$) respecto al tiempo t se tiene:

$$\bar{a} = (d\bar{v}/dt) = (dv/dt)\,\bar{T} + v\,(d\bar{T}/dt) \qquad (1\text{-}12)$$

sabiendo que $d\bar{T}/ds = k\bar{N} = \bar{N}/\rho$ Apéndice A, Ec (A-16) se se obtiene: $(d\bar{T}/dt) = (d\bar{T}/ds).(ds/dt) = k\bar{N} \cdot v = (v\bar{N}/\rho)$

Reemplazando en Ec. (1-12) se tiene:

$$\bar{a} = (dv/dt)\bar{T} + (v^2/\rho)\,\bar{N} = a_t\,\bar{T} + a_n\bar{N} \qquad (1\text{-}13)$$

de donde las componentes escalares de $\bar{a}$ en la dirección de la tangente y la normal Fig. 1.6 son:

$$a_t = (dv/dt) = (vdv/ds)\ ;\ a_n = (v^2/\rho) \qquad (1\text{-}14)$$

Análisis para a_t y a_n.

at = (dv/dt) es debida a la variación de la rapidez de la partícula respecto al tiempo. Puede ser positiva o negativa.

$a_n = (v^2/\rho)$ es debida a la variación de la dirección de su movimiento y con sentido hacia el centro de curvatura c de la trayectoria. Es siempre positiva.

Si v = cte. entonces $a_t = 0$ y $a_n \neq 0$

Si v = variable entonces $a_t \neq 0$ y $a_n \neq 0$.

En los puntos de inflexión, $\rho \to \alpha$; k = 0 y por lo tanto. $a_n = 0$

Las ecuaciones para el radio de curvatura, en diferentes sistemas de coordenadas, se encuentran en el apéndice A.

b) También podría demostrarse así:

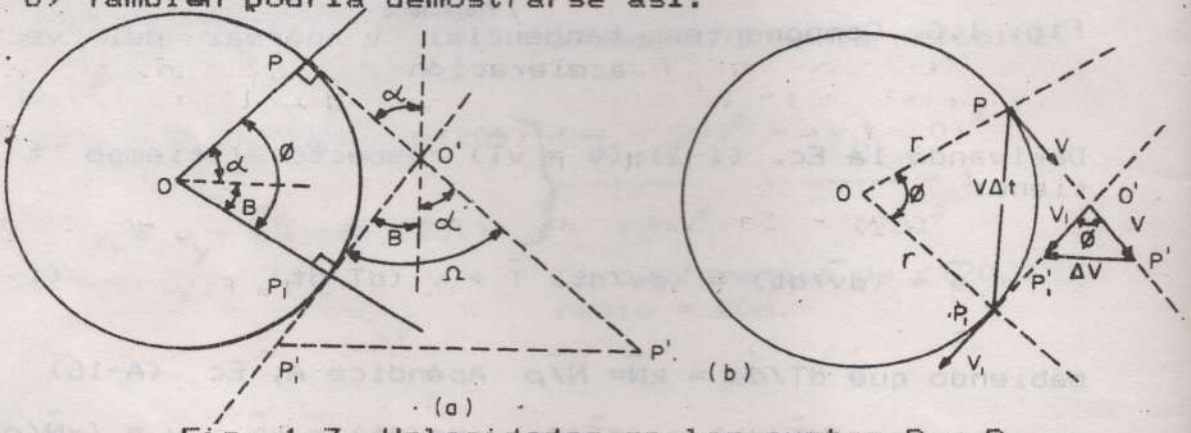


Fig. 1.7. Velocidades en los puntos P y P_1

En la Fig. 1.7.a se observa que $\phi = \Omega$.

Además en la Fig. 1.7.b., se observa que la partícula se desplaza con velocidad v en P, en un tiempo t y con velocidad v_1 en P_1 en un tiempo (t + Δt) pudiendose establecer relaciones entre los triángulos O PP_1 y O'P'P'_1 de la Fig. 1.7.b. así;

$$\frac{v\Delta t}{r} = \frac{\Delta v}{v} \quad \text{entonces} \quad a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

de donde $a = \frac{dv}{dt}\bar{T} + \frac{v^2}{r}\bar{N}$

1.6.- Componentes radial y transversal de la velocidad y aceleración de una partícula.

Analizaremos, el movimiento en el plano de una partícula utilizando coordenadas polares (r, θ).

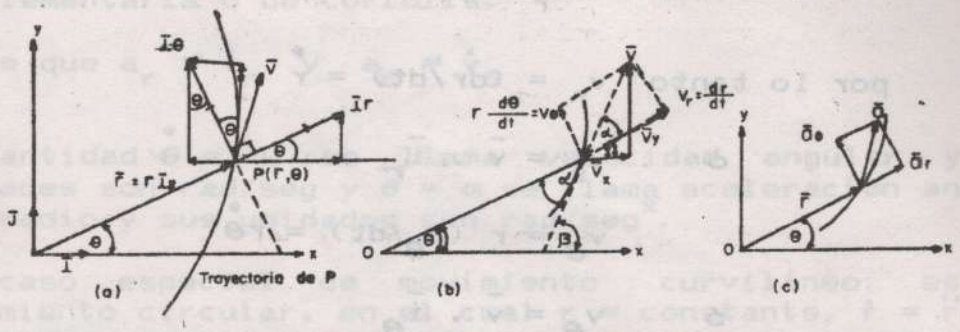


Fig. 1.8. Análisis del movimiento de una partícula usando coordenadas polares.

De ésta manera podemos escribir los vectores velocidad y aceleración en función de dos componentes; la una paralela o en la dirección del radio llamada componente radial y la otra perpendicular al radio en el pto P, llamada componente transversal.

Definiremos los vectores unitarios $\bar{i}_r$ e $\bar{i}_\theta$ en los sentidos de r y θ crecientes como lo muestra la Fig. 1.8.a.

Los vectores $\bar{i}_r$ e $\bar{i}_\theta$ son funciones del ángulo y están relacionadaas con $\bar{i}$, $\bar{j}$ por las ecuaciones:

$$\bar{i}_r = [\cos\theta \; ; \; \text{sen}\theta \;] \qquad (1\text{-}15)$$

$$i_\theta = [\, -\text{sen}\theta \; ; \; \cos\theta \;] \qquad (1\text{-}16)$$

Derivando las Ecs. (1-15) y (1-16) se obtiene

$$d\bar{i}r/d\theta = [\, -\text{sen}\,\theta \; ; \; \cos\theta] = \bar{i}_\theta \qquad (1\text{-}17)$$

$$d\bar{i}\theta/d\theta = [\, -\cos\theta \; ; \; -\text{sen}\theta \;] = -\,\bar{i}_r \qquad (1\text{-}18)$$

ver Fig. 1.8.a.

El vector de posición de $\bar{r}$ en coordenadas polares es:

$$\bar{r} = r(\bar{i}_r) \qquad (1\text{-}19)$$

especificando a r(t) y $\theta(t)$ se describe el movimiento y su vector velocidad es:

$$\bar{v} = (d\bar{r}/dt) = (dr/dt)\,\bar{i}r + r\,(d\bar{i}r/dt) =$$

$$(dr/dt)\bar{i}_r + r(d\bar{i}r/d\theta).(d\theta/dt) = \dot{r}\bar{i}_r + r\dot{\theta}\bar{i}_\theta \qquad (1\text{-}20)$$

por lo tanto $v_r = (dr/dt) = \dot{r}$ (1-21)

ó $v_r = \bar{v} \cdot \bar{i}_r$ (1-21')

$v_\theta = r\,(d_\theta/dt) = r\dot{\theta}$ (1-22)

ó $v_\theta = \bar{v} \cdot \bar{i}_\theta$ (1-22')

son las componentes escalares de $\bar{v}$ en las direcciones radial y transversal. Fig. 1.8.b.

$$v = \sqrt{(dr/dt)^2 + (r.(d\theta/dt))^2} \qquad (1\text{-}23)$$

siendo $tg\ \alpha = v_\theta/v_r = r(d\theta/dt \,/\, dr/dt) = r\,(d\theta/dr)$ (1-23')

El vector aceleración se obtiene derivando el vector velocidad.

$$\bar{a} = d\bar{v}/dt = \ddot{r}\bar{i}_r + \dot{r}d\bar{i}r/dt + \dot{r}\dot{\theta}\bar{i}_\theta + \bar{r}\dot{\theta}(d\bar{i}_\theta/dt) + r\dot{\theta}\bar{i}_\theta$$

$$\bar{a} = \ddot{r}\bar{i}r + \dot{r}(d\bar{i}r/d\theta).(d\theta/dt) + \dot{r}\dot{\theta}\bar{i}_\theta + r\dot{\theta}\bar{i}_\theta + r\dot{\theta}\,d\bar{i}\theta/d_\theta).(d\theta/dt)$$

y reemplazando los valores de $d\bar{i}_r/d_\theta$ y $d\bar{i}_\theta/d_\theta$ y factorizando se tiene:

$$\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{i}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\bar{i}_\theta \qquad (1\text{-}24)$$

Las componentes escalares de la aceleración en las direcciones radial y transversal son:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad (1\text{-}25)$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (1/r)\,\frac{d\,[r^2(d\theta/dt)]}{dt} \qquad (1\text{-}26)$$

El término $2\dot{r}\dot{\theta}$ se le suele llamar aceleración complementaria o de coriolis.

Se ve que $a_r \neq \dot{v}_r$ y $a_\theta \neq \dot{v}_\theta$

La cantidad $\dot{\theta} = w$ se llama velocidad angular y sus unidades son rad/seg y $\ddot{\theta} = \alpha$ se llama aceleración angular del radio y sus unidades son rad/seg^2.

Un caso especial de movimiento curvilíneo es el movimiento circular. en el cual r = constante, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ y las Ecs. (1-20) y (1-24) para velocidad y aceleración se convierten en:

$$\bar{v} = r\dot{\theta}\bar{i}_\theta \quad y \quad \bar{a} = -r\dot{\theta}^2\bar{i}_r + r\ddot{\theta}\bar{i}_\theta \qquad (1\text{-}27)$$

Para el movimiento circular, haciendo la conversión a coordenadas tangencial y normal, se tiene:

$$v = r\dot{\theta} = rw \qquad (1\text{-}28)$$

$$a_t = dv/dt = r\ddot{\theta} = r\alpha \qquad (1\text{-}29)$$

$$a_n = v^2/r = -r\dot{\theta}^2 = -rw^2 \qquad (1\text{-}30)$$

De ésta forma ----> $\bar{a} = a_t\bar{T} + a_n\bar{N} = r\alpha\bar{T} - rw^2\bar{N}$ (1-31)

Observe que existe una diferencia aparente en el signo, pero al ser negativo nos indica que la aceleración normal está dirigida hacia el centro y no hacia afuera.

1.7.- Movimiento curvilíneo de una partícula en el espacio:

a) Coordenadas Cilíndricas.-

Se puede extender el movimiento en el plano de una partícula en coordenadas polares al de un movimiento en el espacio, agregando la coordenada z y el vector unitario k, para obtener en coordenadas cilíndricas (R, θ, z), los vectores v y a. Fig. 1.9.

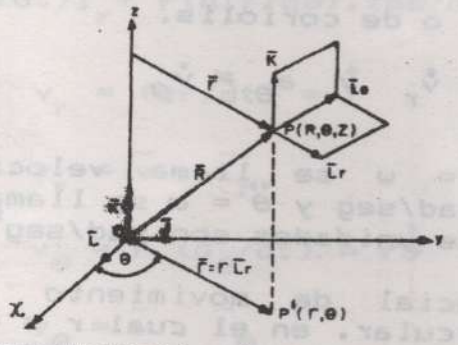


Fig. 1.9. Vectores unitarios en coordenadas cilíndricas.

Para esto se considerará el movimiento adicional en el eje z perpendicular al plano de coordenadas (r, θ) donde k es constante en magnitud y dirección y su derivada será nula.

El vector de posición de cualquier partícula P con respecto al origen, según la Fig. 1.9 es:

$$\bar{R} = r\bar{i}_r + z\bar{k} \qquad (1-32)$$

Derivando la Ec. (1-32) con respecto al tiempo y reemplazando en ella la Ec. (1-17) se tiene:

$$\bar{v} = d\bar{R}/dt = \dot{r}\bar{i}_r + r(\dot{\theta}\bar{i}_\theta) + \dot{z}\bar{k} = v_r\bar{i}_r + v_\theta\bar{i}_\theta + v_z\bar{k} \qquad (1-33)$$

donde v_r, v_θ y v_z son las componentes escalares de $\bar{v}$ en las direcciones radial, transversal y axial respectivamente.

De igual forma el vector aceleración se obtiene derivando la Ec. (1-33) en función del tiempo y reemplazando en ella la Ec. (1-18), entonces:

$$\bar{a} = d\bar{v}/dt = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{i}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\bar{i}_\theta + \ddot{Z}\bar{K} \qquad (1\text{-}34)$$

$$= a_r\bar{i}_r + a_\theta\bar{i}_\theta + a_Z\bar{K}$$

donde a_r, a_θ y a_Z son las componentes escalares de $\bar{a}$ en las direcciones radial, transversal y axial respectivamente.

b) Plano osculador y vector binormal.

Para este caso utilizaremos los conceptos de las componentes en las direcciones normal y tangencial. Sección 1.5; para el movimiento en el plano

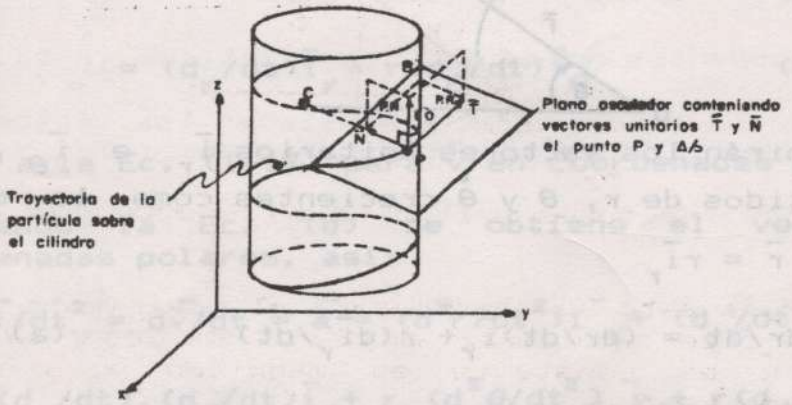


Fig. 1.10. Definición de plano osculador

$\bar{T}$ es un vector unitario tangente a la trayectoria y $\bar{N}$ es un vector unitario normal a $\bar{T}$ dirigido hacia el centro de curvatura del segmento de trayectoria Δs.

Si Δs, tiende a cero, entonces estos vectores unitarios $\bar{T}$ y $\bar{N}$, determinan un plano límite, que se llama plano osculador y que los contiene a ellos. Fig. 1.10.

$\bar{N}$ = Normal principal en P

El vector unitario $\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N}$ se llama binormal en P y es perpendicular al plano esculador.

El plano osculador contiene entonces a los vectores $\bar{v}$ y $\bar{a}$.

El plano determinado por $\bar{B}$ y $\bar{N}$ y que es perpendicular al vector $\bar{T}$ se llama plano normal Fig. 1.10.

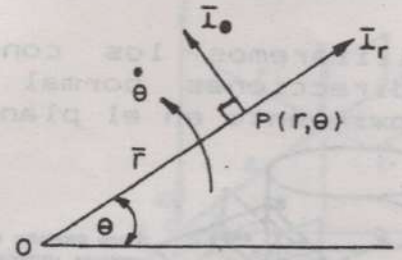
El plano determinado po $\bar{T}$ y $\bar{B}$ y es perpendicular al vector $\bar{N}$ se llama plano rectificante Fig. 1.10.

También $\bar{B} = \bar{v} \times \bar{a} / |\bar{v} \times \bar{a}|$ ya que los vectores $\bar{v}$ y $\bar{a}$ están contenidos en el plano osculador y la dirección de la binormal es paralela al producto vectorial $\bar{v} \times \bar{a}$.

1.8.- Otras formas de analizar el movimiento de una partícula tanto en el plano como en el espacio.

1) Coordenadas polares $(r - \theta)$.

Sea $P(r, \theta)$ una partícula que se mueve en el plano.



Se definirán los vectores unitarios $\bar{i}_r$ e $\bar{i}_\theta$, $f(\theta)$ en los sentidos de r, θ y $\dot{\theta}$ crecientes como lo muestra la figura.

$$\bar{r} = r\bar{i}_r$$

$$d\bar{r}/dt = (dr/dt)\bar{i}_r + r(d\bar{i}_r/dt) \qquad (a)$$

Por la regla de la derivación en cadena

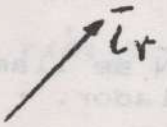
$$d\bar{i}_r/dt = (d\bar{i}_r/d\theta).(d\theta/dt)$$

Hay que encontrar $d\bar{i}_r/d\theta$

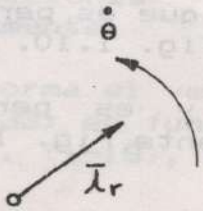
Por el Teorema de Charles: la derivada de un vector fijo $(\bar{A})$, en un sistema de referencia móvil es $\frac{d\bar{A}}{dt} = w \times \bar{A}$.

Procedimiento para hallar $d\bar{i}_r/d\theta$

Se indica

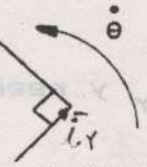


Se superpone $\dot{\theta}$ en la dirección creciente.



Perpendicular a $\bar{i}_r$ y en el sentido de θ, está $d\bar{i}_r/d_\theta$

$$d\bar{i}_r/d\theta = \bar{i}_\theta$$



entonces $d\bar{i}_r/dt = (d_\theta/dt)\bar{i}_r = \dot{\theta}\bar{i}_r$

Reemplazando en (a), entonces:

$$d\bar{r}/dt = \bar{v} = (d_r/dt)\bar{i}_r + r(d\bar{i}_r/d_\theta).(d_\theta/dt) =$$

$$= (d_r/dt)\bar{i}_r + r(d_\theta/dt)\bar{i}_\theta \qquad (b)$$

igual a la Ec. (1-17) para $\bar{v}$ en coordenadas polares.

Derivando la Ec. (b) se obtiene el vector $\bar{a}$ en coordenadas polares, así:

$$d^2\bar{r}/dt^2 = d\bar{v}/dt = \bar{a} = (d^2r/dt^2)\bar{i}_r + (d_r/dt).(d\bar{i}_r/dt) +$$

$$+ (d_r/dt).(d_\theta/dt)\bar{i}_\theta + r(d^2\theta/dt^2)\bar{i}_\theta + r(d_\theta/dt).(d\bar{i}_\theta/dt).$$

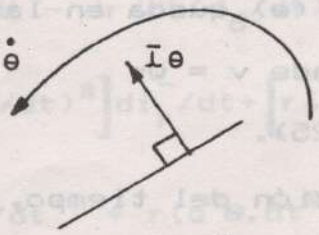
$$(c)\ \bar{a} = (d^2r/dt^2)\bar{i}_r + (d_r/dt).(d_\theta/dt)\bar{i}_\theta + (d_r/dt).(d_\theta/dt)\bar{i}_\theta +$$

$$+ r(d^2\theta/dt^2)\bar{i}_\theta + r(d_\theta/dt).(d\bar{i}_\theta/d_\theta).(d_\theta/dt).$$

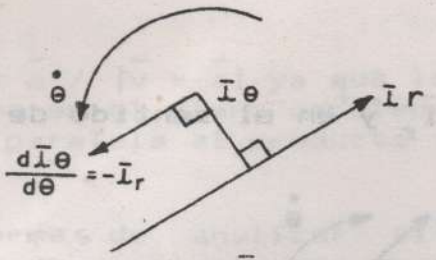
ya que $(d\bar{i}_\theta/dt) = (d\bar{i}_\theta/d_\theta).(d_\theta/dt)$

$d\bar{i}_\theta/d_\theta$ se obtiene se esta forma.

Se indica $\bar{i}_\theta$ y se le superpone $\dot{\theta} = d_\theta/dt$ en la dirección creciente.



entonces, perpendicular a $\bar{i}_\theta$ y en el sentido de θ, está $d\bar{i}_\theta/d_\theta$, en sentido contrario a $\bar{i}_r$, entonces:



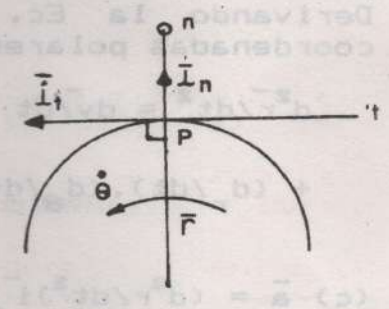
así: $d\bar{i}_\theta/dt = -(d_\theta/dt).\bar{i}_r$ y reemplazando en la Ec. (c) se tiene:

$$\bar{a}=\left[d^2r/dt^2-r(d_\theta/dt)^2\right]\bar{i}_r+\left[r(d^2\theta/dt^2)+2(d_r/dt).(d_\theta/dt)\right]\bar{i}_\theta \quad (d)$$

igual a la Ec. (1-21) para $\bar{a}$ en coordenadas polares.

2) **Componentes normales y tangenciales (n-t).**

De la misma forma se obtienen los vectores $\bar{v}$ y $\bar{a}$ en componentes normales y tangenciales.



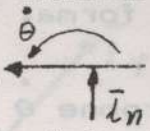
El vector de posición de P es:

$$\bar{r} = r\bar{i}_n$$

Derivando en función del tiempo se tiene:

$$d\bar{r}/dt = (dr/dt)\bar{i}_n + r(d\bar{i}_n/dt = r(d\bar{i}_n/d\theta).(d\theta/dt) \quad (e)$$

por ser r = cte y además $d\bar{i}_n/d_\theta$ se obtiene así:



$$d\bar{i}_n/d\theta = \bar{i}_t$$

Por lo tanto la Ec (e) queda en la forma

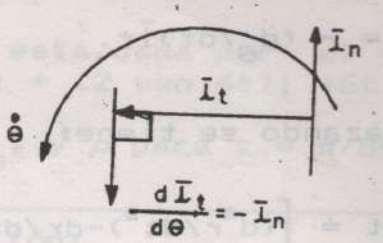
$$\bar{v} = wr\bar{i}_t \quad \text{donde } v = wr$$

igual a la Ec. (1-25).

Derivando $\bar{v}$ en función del tiempo, se tiene:

$$\bar{a} = d\bar{v}/dt = w\,r\,(d\bar{i}_t/dt) = w\,r\,(d\bar{i}_t/d\theta).(d\theta/dt)$$

pero $d\bar{i}_t/d_\theta$ se obtiene así:



Por lo tanto

$$\bar{a} = - w^2 r \bar{i}_n$$

$$a = w^2 r$$

3.- **Sacudida en componentes (n-t).**

Se sabe que $\bar{a} = - w^2 r \bar{i}_n$

derivando en función del tiempo.

$$\bar{\lambda} = d\bar{a}/dt = - w^2 r (d\bar{i}_n/dt) = - w^2 r (d\bar{i}_n/d_\theta).(d_\theta/dt)$$

como $d\bar{i}_n/d_\theta = \bar{i}_t$ entonces

$$\bar{\lambda} = d\bar{a}/dt = - w^3 r \bar{i}_t$$

Mientras que la aceleración está en sentido opuesto a la normal, la sacudida va en sentido opuesto a la tangente.

Sacudida en componentes (r, θ).

Sea la aceleración

$$\bar{a}=\left[(d^2r/dt^2)-(d\theta/dt)^2\right]\bar{i}_r + \left[r(d^2\theta/dt^2) + 2(dr/dt).(d\theta/dt)\right]\bar{i}_\theta$$

Derivando en función del tiempo y sabiendo que:

$d\bar{i}_\theta/d\theta = - \bar{i}_r$ y que $d\bar{i}_r/d_\theta = \bar{i}_\theta$, se tiene

$$\bar{\lambda}=d\bar{a}/dt = \left[d^3r/dt^3 - dr/dt(d_\theta/dt)^2 - 2r(d\theta/dt).(d^2\theta/d_t^2)\right]\bar{i}_r +$$

$$+\left[(d^2r/dt^2)-r(d\theta^2/dt)^2\right]d\bar{i}_r/dt+\left[r(d^2\theta/dt^2)+2(dr/dt).(d\theta/dt\right]\frac{d\bar{i}_\theta}{dt}+$$

$$+ \left[(dr/dt).(d^2\theta/dt^2) + r(d^3\theta.dt^3) + 2(d^2r/dt^2).(d\theta/dt) +\right.$$

$$\left. + 2(dr/dt).(d^2\theta/dt^2)\right]\bar{i}_\theta \quad \text{pero.}$$

$d\bar{i}_r/dt=(d\bar{i}_r/d\theta).(d\theta/dt)=(d\theta/dt)\bar{i}_\theta$; $d\bar{i}_\theta/dt=(d\bar{i}_\theta/d_\theta).(d_\theta/dt)$

$d\bar{i}_\theta/dt= -(d_\theta/dt)\bar{i}r.$

Reemplazando se tiene:

$$\bar{\lambda}=d\bar{a}/dt = \left[(d^3r/dt^3)-dr/dt(d\theta/dt)^2 - 2r(d\theta/dt).(d^2\theta/dt^2)\right.$$

$$\left.-r(d\theta/dt).(d^2\theta/dt^2)-2(dr/dt).(d\theta/dt)^2\right]\bar{i}_r+\left[(dr/dt).(d^2\theta/dt^2)+\right.$$

$$\left.+ r(d^3\theta/dt^3) + 2(d^2r/dt^2).(d\theta/dt) + 2(dr/dt).(d^2\theta/dt^2)\right.$$

$$\left.+ (d^2r/dt^2).(d\theta/dt) - r(d\theta/dt)^3\right]\bar{i}_\theta$$

En definitiva

$$\bar{\lambda}=d\bar{a}/dt=\left[(d^3r/dt^3)-3r(d\theta/dt).(d^2\theta/dt^2)-3(dr/dt).(d\theta/dt)^2\right]\bar{i}_r$$

$$+\left[r(d^3\theta/dt^3) + 3(dr/dt).(d^2\theta.dt^2) + 3(d\theta/dt).(d^2r/dt^2)\right.$$

$$\left.- r(d\theta/dt)^3\right]\bar{i}_\theta \qquad (g)$$

Ejemplo 1.8.

La posición de una partícula está dada por el vector de posición: $\bar{r} = [(2\cos 4t);\ +(2\sen 4t);\ +6t]$ metros para t en seg.
Hallar: v, v, a, a, $\bar{T}$, a_t, a_n, y ρ para $t = \pi/8$seg.

Solución:

Conocido el vector de posición, derivamos dos veces para encontrar los vectores velocidad y aceleración en función de t.

$$\bar{v}=\left[-8\ \text{sen}4t;\ 8\ \cos 4t;6\right] \quad a=\left[-\ 32\ \cos\ 4t;\ -32\ \text{sen}\ 4t;0\right]$$

$$v=\sqrt{64(\text{sen}^2 4t+\cos^2 4t)+36} \qquad a = \sqrt{32^2(\cos^2 4t+\text{sen}^2 4t}$$

$$v = 10\ \text{m/seg} \qquad a = 32\ \text{m/seg}^2$$

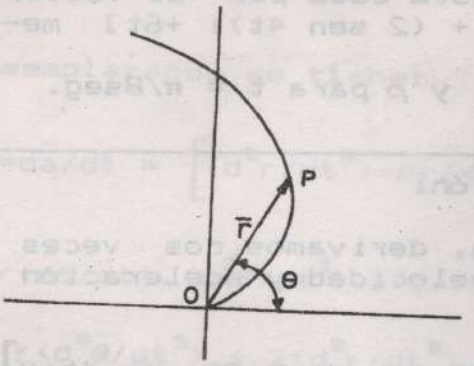
Utilizando la Ec. (1.2) se obtiene T así:

$$\bar{v} = v\bar{T} \Rightarrow \bar{T} = \bar{v}/v = 1/10\left[-\ 8\ \text{sen}\ \pi/2;\ 8\ \cos\ \pi/2;6\right]$$

$$\bar{v} = \left[-\ 0{,}8;\ 0;\ 0{,}6\right]$$

$$a_t = dv/dt = d(10)/dt = 0$$

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2 \Rightarrow a = a_n\ 32 = v^2/\rho \Rightarrow \rho=(10)^2/32=25/8\ \text{m}$$



Ejemplo 1.9.

La trayectoria de una partícula P es una espiral de Arquimedes. El movimiento de la partícula está definida por la relación $r=10t$ y $\theta=2\pi t$, con r en metros, t en seg y θ en radianes.
Determinar la velocidad y aceleración de la partícula cuando a) $t = 0$ y b) $t = 1/4$seg.

Solución:

Las ecuaciones paramétricas del movimiento sobre la espiral de Arquímedes son:

$$r = 10t \qquad \theta = 2\pi t$$
$$\dot{r} = 10 \qquad \dot{\theta} = 2\pi$$
$$\ddot{r} = 0 \qquad \ddot{\theta} = 0$$

Calculamos las componentes de $\bar{v}$ y $\bar{a}$ en función de t, mediante las Ecs. (1-20), (1-21), (1-24) y (1-25) así:

$$v_r = \dot{r} = 10 \qquad v_\theta = r\dot{\theta} = (10t)(2\pi) = 20\pi t$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - (10t)(2\pi)^2 = -40\pi^2 t$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 + 2(10)(2\pi) = 40\pi.$$

a) Cuando $t = 0$; $r = 0$; $\theta = 0$.

$v_r = 10$ m/seg; $v_\theta = 0$ ===> $\bar{v} = 10\bar{i}_r$ m/seg.

$a_r = 0$; $a_\theta = 40\pi$ m/seg^2 ===> $\bar{a} = 125,60\bar{i}_\theta$ m/seg^2

b) Cuando $t = 1/4$ seg; $r=10(1/4)=2,5$ m; $\theta=2\pi(1/4)=\pi/2$

$v_r = 10$ m/seg; $v_\theta = 20\pi(1/4) = 5\pi = 15,70$ m/seg ==>

==> $\bar{v} = (10\bar{i}_r + 15,70\bar{i}_\theta)$ m/seg.

$tg\beta = v_\theta/v_r = 15,70/10 = 1,57$ ==> $\beta = \text{arctg}\ (1,57) = 57,50°$

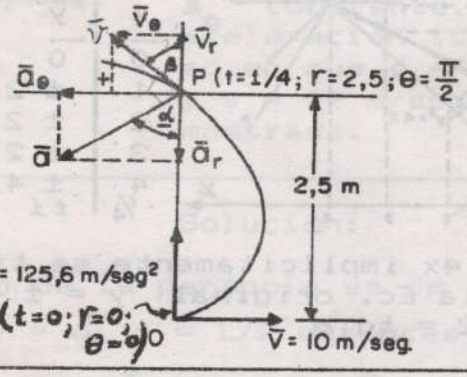
Continuación Ejemplo 1.9.

$a_r = -40\pi^2 (1/4) = -10\pi^2 = -98,60 m/seg^2$; $a_\theta = 40\pi = 125,6 m/seg^2$

$$\bar{a} = (-98,6\bar{i}_r + 125,6\bar{i}_\theta)\ m/seg^2$$

$tg\alpha = a_\theta / a_r = 125,60/-98,60 = -1,2738$ ===>

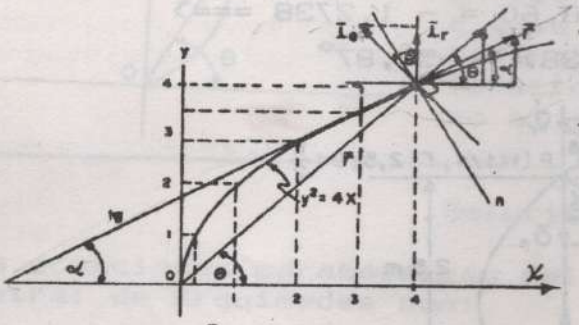
===> $\alpha = arctg\ (-1,2738) = -51,87°$



Ejemplo 1.10.

Una partícula se mueve con rapidez constante v=20m/s a lo largo de la parábola $y^2 = 4x$. Hallar el vector velocidad para x = 4 y la componente de éste en las direcciones radial y transversal desde dicho punto.

Solución:

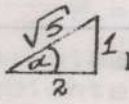


v = 20m/seg; $y^2=4x$

x = 4

x	y	
0	0	
1	± 2	
2	± 2	$\sqrt{2}$ = ± 2,83
3	± 2	$\sqrt{3}$ = ± 3,46
4	± 4	
1/4	± 1	

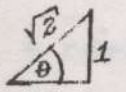
Derivando $y^2 = 4x$ implícitamente se tiene $2y\,y' = 4$, para x = 4 en la Ec. original $y = \pm 4$ y $y' = 4/2y = 4/(2 \times 4) = 1/2 = tg\ \alpha$



De la Ec. $\bar{v}=v\bar{T}$; $\bar{T}=[\cos\alpha;\ \text{sen}\ \alpha]=\left[2/\sqrt{5}\ ;1/\sqrt{5}\right]$

entonces $\bar{v} = 20 \left[2\sqrt{5}/5\ ;\ \sqrt{5}/5 \right] =$

$\bar{v} = 4\sqrt{5}\left[\ 2\ ;\ 1\ \right]$ m/seg



Utilizando las Ec. (1-20') y (1-21') se tiene:

$$v_r = \bar{v} \cdot \bar{i}_r = 4\sqrt{5}\ \left[\ 2\ ;\ 1\ \right] \cdot \left[\ \cos\theta\ ;\ \text{sen}\ \theta\ \right]$$

$$= 4\sqrt{5}\ \left[\ 2\ ;\ 1\ \right] \cdot \left[\ 1/\sqrt{2}\ ;\ 1/\sqrt{2}\ \right]$$

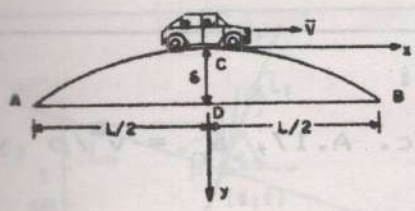
$$v_r = 4\sqrt{10} + 2\sqrt{10} = 6\sqrt{10} = 18,97\ \text{m/seg}$$

$$v_\theta = \bar{v} \cdot \bar{i}_\theta = 4\sqrt{5}\ \left[\ 2\ ;\ 1\ \right] \cdot \left[\ -\ \text{sen}\theta\ ;\ \cos\theta\ \right]$$

$$= 4\sqrt{5}\ \left[\ 2\ ;\ 1\ \right] \cdot \left[\ -\sqrt{2}/2\ ;\ \sqrt{2}/2\ \right]$$

$$v_\theta = -4\sqrt{10} + 2\sqrt{10} = -2\sqrt{10} = -6,32\ \text{m/seg}$$

Ejemplo 1.11.



Un automóvil recorre a velocidad constante la curva parabólica ACB, cuya ecuación es de la forma $y = a_o x^2$ con a_o constante. Determine la aceleración total para el caso en que $\delta = 1{,}20$ m; $l = 60$m y $v = 27$ m/seg en la posición mostrada.

Solución:

Como la ecuación de la parábola es de la forma:

$y = a_o x^2$, para $y = \delta$; $x = L/2$ entonces $a_o = 4\delta/L^2 = cte$

$y = (4\delta/L^2)\, x^2$ pero $\bar{a} = (dv/dt)\,\bar{T} + (v^2/\rho)\bar{N}$

$a_t = dv/dt = 0$; $a_n = v^2/\rho$; $\rho = [1+(y')^2]^{3/2}/|y''|$ Ec.A.19

como $y' = (8\delta/L^2)x$; $y'' = 8\delta/L^2$ y cuando el carro se encuentra en el punto C; $x=0$ y $\rho = [1+0]^{3/2}/(8\delta/L^2) = L^2/8\delta$

$\rho = (60\text{m})^2/8(1{,}20\text{m}) = 375$ m reemplazando:

$a_n = (27\text{m/seg})^2/375\text{m} = 1{,}94$ m/seg^2 ; $\bar{a} = (1{,}94\,\bar{N})$ m/seg^2

Ejemplo 1.12.

El vector de posición de una partícula está dado por la ecuación $\bar{r} = 3t^2 + 6t\,\bar{j} + t^3\,\bar{K}$, estando t(seg) y $\bar{r}$ (metros). Determine los vectores velocidad y aceleración en función de $\bar{T}$ y $\bar{N}$.

Solución:

Método 1.- Se calcula ρ por la Ec. A.17, $a_n = v^2/\rho$ y luego a_t.

Asi: $\bar{r} = 3t^2\bar{i} + 6t\bar{j} + t^3\bar{k}$

$\bar{v} = 6t\bar{i} + 6\bar{j} + 3t^2\bar{k}$; $v = 3(t^2 + 2)$

$\bar{a} = 6\bar{i} + 0\bar{j} + 6t\,\bar{k}$

$\bar{v}x\bar{a} = (6t\bar{i}+6\bar{j}+3t^2\bar{k}) x (6\bar{i}+6t\bar{k}) = 36t\bar{i} + (18t^2 - 36t^2)\bar{j} - 36\bar{k}$

$\bar{v}x\bar{a} = 18\,(2t\bar{i} - t^2\,\bar{j} - 2\bar{k})$

$|\bar{v}x\bar{a}| = 18\,(t^2 + 2)$

$v^3 = 3^3\,(t^2 + 2)^3$ entonces

$\rho = v^3/|\bar{v}x\bar{a}| = 3^3(t^2 + 2)^3 / 18(t^2+2) = 3(t^2+2)^2/2$

$a_n = v^2/\rho = 3^2\,(t^2 + 2)^2 / 3/2(t^2 + 2)^2 = 6$

$a^2 = \bar{a}.\bar{a} = 36 + 36t^2$ entonces

$$a_t = \sqrt{a^2 - a_n^2} = \sqrt{36 + 36t^2 - 36} = 6t$$

así: $\bar{a} = (6t.\bar{T} + 6\bar{N})\,m/seg^2$

Método 2.- Se calcula a_t; se tiene el valor de a en el método 1 y se calcula a_n, de ésta forma.

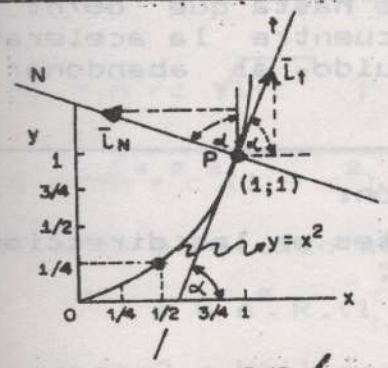
$a_t = \bar{a} \cdot \bar{T} = \bar{a} \cdot (\bar{v}/v) = (36t + 18t^3)/3(t^2+2) = 6t$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{36 + 36t^2 - 36t^2} = 6$$ entonces

$\bar{a} = (6t.\bar{T} + 6\bar{N})\ m/seg^2$

Ejemplo 1.13.

Una partícula se mueve con rapidez constante v a lo largo de la parábola $y = x^2$. hallar el vector aceleración de la partícula cuando pase por el punto P(1 ; 1).



Solución:

v = cte

x	y
0	±0
1/4	±1/16
1/2	±1/4
3/4	±9/16
1	±1

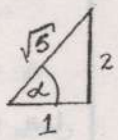
$\bar{a}_p = a_t \bar{i}_t + a_n \bar{i}_n$

$a_t = dv/dt = 0$

$\bar{a}_p = a_n \bar{i}_n = (v^2/\rho)\bar{i}_n$ (1)

$$\rho = \left[1+(y')^2\right]^{3/2} \Big/ |y''| \; ; \; y' = 2x \text{ para } (1;1) \Rightarrow y' = 2 ; \; y'' = 2$$

$$\rho = \left[1 + 4\right]^{3/2} \Big/ |2| = 5\sqrt{5} \Big/ 2$$



$\bar{i}_n = [-\text{sen}\alpha \; ; \; \cos\alpha]$ y $\text{tg}\,\alpha = y' = 2/1 \Rightarrow$

$$\bar{i}_n = \left[-2/\sqrt{5} \; ; \; 1/\sqrt{5}\right] \Rightarrow \text{en (1) se tiene:}$$

$$\bar{a}_p = 2v^2 / 2\sqrt{5}\left[-2/\sqrt{5} \; ; \; 1/\sqrt{5}\right]$$

$$\bar{a}_p = \left(2v^2/25\right).\left[-2 \; ; \; 1\right]$$

$a_t = \bar{a} \cdot \bar{T}$

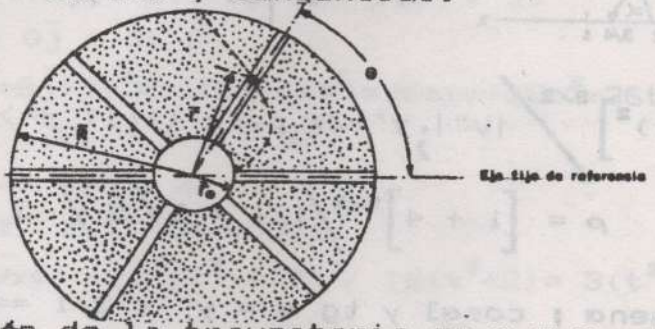
$a_n = \bar{a} \cdot \bar{N}$

Ejemplo 1.14.

La trayectoria de una partícula de fluído en una bomba centrífuga de palas planas se ha señalado como si fuera la espiral $r = r_0 e^{c\theta}$, donde c es una constante adimensional. Las posiciones angulares del fluído y de la hélice de la bomba vienen ambas dadas por θ y la distancia radial especificada por r. Si la bomba gira con velocidad angular constante hasta que $d\theta/dt = A$, donde A es una constante, encuentre la aceleración total de la partícula de fluído al abandonar la hélice.

Solución:

Método 1.- Utilizando componentes en las direcciones normal y tangencial.



La ecuación de la trayectoria es $r = r_0 e^{c\theta}$ y $d\theta/dt = A$

La expresión de la aceleración, Ec. 1-12. es:

$\bar{a} = (dv/dt)\,\bar{T} + (v^2/\rho)\,\bar{N} = (dv/dt)\,\bar{T} + w^2 \rho\,\bar{N}$ siendo

$$v = \rho . w = \rho\,(d\theta/dt)$$

Reemplazando en la ecuación de $\bar{a}$ se tiene:

$$\bar{a} = \left[\rho(d^2\theta/dt^2) + w(d\rho/dt\right]\bar{T} + w^2\rho\bar{N}$$

De acuerdo a la Ec. A.21;

$$\rho = \left[r^2 + (r')^2\right]^{3/2} \Big/ |r^2 + 2(r')^2 - rr''| \quad \text{así}$$

$r' = dr/d\theta = r_0 c e^{c\theta} = rc$; $r'' = d^2r/d\theta^2 = r_0 c^2 e^{c\theta} = rc^2$ y

$$\rho = \left[r^2 + r^2c^2\right]^{3/2} \Big/ |r^2 + 2r^2c^2 - r^2c^2| = r.\sqrt{1+c^2}$$

$$\rho = (r_0 e^{c\theta})\sqrt{1+c^2} \quad \text{pero}$$

Continuación Ejemplo 1.14.

$d\rho/dt = (d\rho/d\theta).(d\theta/dt) = r_o c e^{c\theta}\sqrt{1+c^2}\,(d\theta/dt)$

$d\rho/dt = rcA\sqrt{1+c^2}$ además $d\theta/dt = A$; $d^2\theta/dt^2 = 0$ De esta manera

$a_t = A^2 rc\sqrt{1+c^2}$; $a_n = A^2.r.\sqrt{1+c^2}$; $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

$a = \sqrt{A^4 r^2 c^2(1 + c^2) + A^4 r^2(1 + c^2)} = A^2 r.(1 + c^2)$

cuando el fluído abandona la hélice $r = R$ y

$$a = A^2.R.(1 + c^2)$$

Método 2.- Utilizando componentes en las direcciones radiales y transversales se tiene según la Ec. (1-23).

$\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{i}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\bar{i}_\theta$ entonces

$r = r_o e^{c\theta}$ $\qquad d\theta/dt = A$

$\dot{r} = dr/dt = r_o ce^{c\theta}\, d\theta/dt = crA$ $\qquad d^2\theta/dt^2 = 0$

$\ddot{r} = d^2r/dt = r_o c^2 e^{c\theta}(d\theta/dt)^2 + 0 = rc^2A^2$ de esta forma

$a_r = rc^2A^2 - rA^2 = r.A^2.(c^2 - 1)$

$a_\theta = 0 + 2(crA)A = r.A^2.(2c)$ y

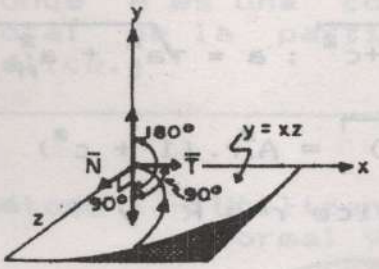
$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{r^2A^4(c^2 - 1) + r^2A^4(2c)^2} = A^2r.(1 + c^2)$ y

para $r = R$ entonces

$$a = A^2R.(1 + c^2)$$

Ejemplo 1.15

Determine la dirección de la binormal de la trayectoria de una partícula cuya $\bar{v} = \bar{i} + 3t^2\bar{j} + 2t\bar{k}$ y la $\bar{a} = 6t\bar{j} + 2\bar{k}$, cuando: a) $t = 0$; b) $t = 2$ seg.



Solución:

$\bar{B} = (\bar{v} \times \bar{a}) / |\bar{v} \times \bar{a}|$ por ser $\bar{i}_B$ paralela al producto vectorial $\bar{v} \times \bar{a}$, ya que $\bar{v}$ y $\bar{a}$ estan contenidas en el plano osculador.

$$\bar{v}x\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 3t^2 & 2t \\ 0 & 6t & 2 \end{vmatrix} = 6t^2\bar{i} - 2\bar{j} + 6t\bar{k}$$

$$|\bar{v} \times \bar{a}| = \sqrt{(-36t^2)^2 + (-2)^2 + (6t)^2}$$

a) Cuando $t = 0$; entonces $\bar{B} = -2\bar{j}/2 = -\bar{j}$

Aquí $\theta_x = \theta_z - 90^\circ$ y $\theta_y = 180^\circ$; ver Figura.

b) Cuando $t = 2$ seg; entonces; $\bar{v} \times \bar{a} = -24\bar{i} - 2\bar{j} + 12\bar{k}$

$$|\bar{v} \times \bar{a}| = \sqrt{(-24)^2 + (-2)^2 + (12)^2} = 26,91$$

$$\bar{B} = 1/26,91\left[-24\bar{i} - 2\bar{j} + 12\bar{k}\right] = -0,89\bar{i} - 0,07\bar{j} + 0,45\bar{k}$$

Los ángulos directores son:

$\cos \theta_x = -24/26,91 = -0,892$; $\theta_x = \text{arc cos}(-0,892) = 153,1^\circ$

$\cos \theta_y = -2/26,91 = -0,00743$; $\theta_y = \text{arc cos}(-0,0743) = 94,3^\circ$

$\cos \theta_z = 12/26,91 = 0,446$; $\theta_z = \text{arc cos}(0,446) = 63,5^\circ$

Ejemplo 1.16.

Determine la sacudida sobre una partícula que se está moviendo a lo largo de una barra con una rapidez $dr/dt = 2$ m/seg relativa a ella, mientras que la barra rota en el plano con una velocidad angular $w=d\theta/dt=5$rad/seg, aceleración angular $\alpha=d^2\theta/dt^2$/rad/s^2 $\theta = d^3\theta/dt^3 = 2$ rad/seg^3.
La partícula se encuentra en una posición de 3 metros en el instante considerado.

Solución:

$$\bar{\lambda}=d\bar{a}/dt=\left[d^3r/dt^3-3r(d_\theta/dt).(d^2\theta/dt^2)-3dr/dt(d\theta/dt)^2\right]\bar{i}_r$$

$$+\left[r(d^3\theta/dt^3+3(dr/dt).(d^2\theta/dt^2)+3(d\theta/dt).(d^2r/dt^2)\right.$$

$$\left.-r(d\theta/dt)^3\right]\bar{i}_\theta;\ dr/dt=2\ \text{m/seg}\ ;\ d^2r/dt^3=0=d^3r/dt^3;\ r=3\text{m};$$

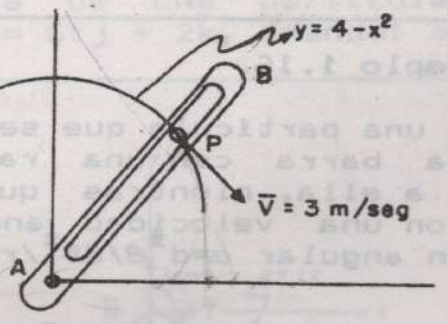
$$d\theta/dt=5\ \text{rad/seg};\ d^2\theta/dt^2=8\ \text{rad/seg}^2;\ d^3\theta/dt^3=2\ \text{rad/seg}^3$$

$$\bar{\lambda}=\dot{\bar{a}}\left[0-3.3.5.8-3.2(5)^2\right]\bar{i}_r+\left[3.2+3.2.8+0-3(5)^3\right]\bar{i}_\theta$$

$$\bar{\lambda}=\dot{\bar{a}}=(-510\bar{i}_r-321\bar{i}_\theta)\ \text{m/seg}^3$$

Problemas / secs (1.5 - 1.6 - 1.7 - 1.8)

1.22.-



El brazo mecánico AB rota a velocidad tal, que el perno que se desliza sobre la ranura parabólica $y = 4 - x^2$; tiene rapidez constante de 3 m/seg. Calcule las componentes horizontal y vertical de los vectores velocidad y aceleración del perno cuando x = 2m.

R: $\bar{v}_p = (0,72\bar{i} - 2,91\bar{j})$ m/seg; $\bar{a}_p = (-0,25\bar{i} - 0,06\bar{j})$ m/seg^2

1.23.- Una partícula recorre la curva y = tg x con rapidez constante v = 5 m/seg. Calcular los vectores velocidad, aceleración y el radio de curvatura en el punto de abcisa $x = \pi/4$.

R; $v = \left(\sqrt{5}\,\bar{i} + 2\sqrt{5}\,\bar{j}\right)$m/seg; $\bar{a} = (-8\bar{i} + 4\bar{j})$m/seg^2 ;

$\rho = \left(5\sqrt{5}/4\right)$m.

1.24.- Las coordenadas de una partícula son:
$x = t^2$; $y = 2t$ para t en segundos.

a) Dibujar la trayectoria para $x \geq 0$; $y > 0$ y mostrar sobre ella los vectores r, v, a. a_n y a_t.

b) Calcular v_r, v_θ, $\bar{a}_t$ y $\bar{a}_n$ para t = 1 seg.

R: b) $v_r = \left(6\sqrt{5}/5\right)$m/seg; $v_\theta = \left(2\sqrt{5}/5\right)$m/seg;

$\bar{a}_t = [1\ ;\ 1]$m/seg^2 ; $\bar{a}_n = [1\ ;\ -1]$m/seg^2

a) Parábola simétrica respecto al eje x, en el primer cuadrante.

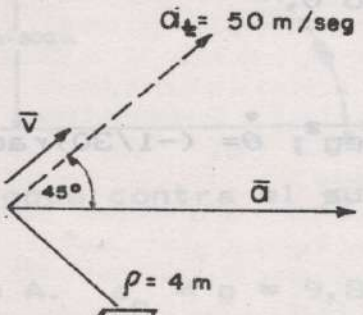
1.25.- La ecuación de la trayectoria descrita por un punto material P es $y^2 = 4x$ ($x \geq 0$; $y \geq 0$). En el instante $t = 0$ el móvil pasa por el origen de coordenadas. La proyección del movimiento sobre el eje de las x es un movimiento uniformemente acelerado, con la aceleración de 8 m/seg^2. Determinar.

a) El vector velocidad del móvil al pasar por el origen.

b) La aceleración normal y el radio de curvatura de la trayectoria cuando t = 3 seg.

R: a) $\bar{v}_0 = 4\bar{j}$; b) $a_n = 1{,}32$ m/seg^2 ; $\rho = 450{,}12$ m.

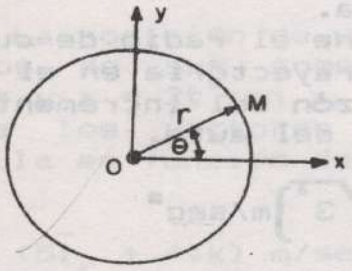
1.26.-



En el instante en que una partícula está recorriendo una curva donde $\rho = 4$ metros, el ángulo de inclinación entre $\bar{v}$ y $\bar{a}$ es de 45°. Si la magnitud de $a_t = 50$ m/seg^2, determinar la magnitud de la velocidad.

R: $v = 10.\sqrt{2}$. m/seg.

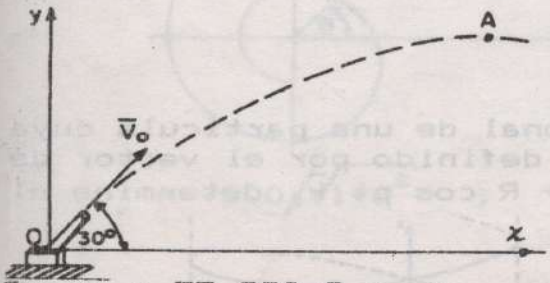
1.27.-



Una partícula M se está moviendo en sentido horario sobre una trayectoria circular de radio r = 1 m. La velocidad de 10 m/seg se está incrementando a razón de 2 m/seg^2 cuando $\theta = 30°$. Determine el vector aceleración de la partícula M.

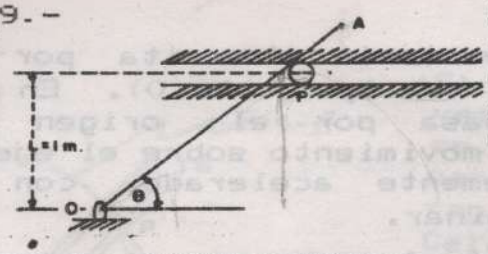
R: $\bar{a} = \left[(1 - 50\sqrt{3})\bar{i} + (-\sqrt{3} - 50)\bar{j}\right]$ m/seg^2

1.28.-



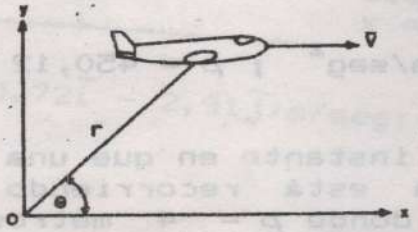
Un proyectil es lanzado con una velocidad inicial v_0=800 m/seg. Determine los radios de curvatura de la trayectoria; a) Inmediatamente después de lanzado y b) en el punto de máxima altura.

R: $\rho_0 = 75.382{,}8$ m ; $\rho_A = 48.979{,}59$ m

1.29.- 

Una pelota P de un mecanismo es empujada hacia la derecha con una velocidad constante v = 10 m/seg. Determine $\dot{\theta}$ de la barra OA si $\theta = 60^\circ$ y L = 1m.

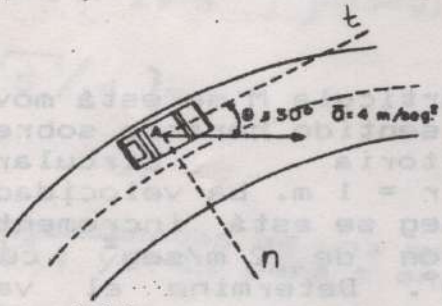
R: $\dot{\theta} = -15/2$ rad/seg.

1.30.- 

Los siguientes datos son obtenidos de un avión, por radio: $v = 120i$ m/seg y $a = 30i$ m/seg^2 en $x = y = 1800$ m. Determine $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ medido por el radar en el punto O.

R: $\dot{r} = \left(60\sqrt{2}\right)$ m/seg; $\ddot{r} = \left(17\sqrt{2}\right)$ m/seg^2; $\dot{\theta} = (-1/30)$ rad/seg;

$\ddot{\theta} = (19/1800)$ rad/seg^2

1.31.- 

En el instante mostrado, el auto A desarrolla una rapidez de 20m/seg y una aceleración de 4 m/seg^2 según la dirección indicada.
Determine el radio de curvatura de la trayectoria en el punto A y la razón del incremento de la rapidez del auto.

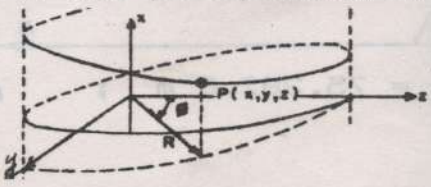
R: $\rho_A = 200$ m. $\quad a_t = \left(2\sqrt{3}\right)$ m/seg^2

1.32.- El movimiento de una partícula está definido por las ecuaciones $x = (t + 1)$m ; $y = (3t^2 + 6t + 3)$m; determine el radio de curvatura de su trayectoria para t = 0 seg.

R: $\rho = 37{,}51$ metros.

1.33.- El movimiento tridimensional de una partícula cuya trayectoria es una hélice, está definido por el vector de posición $r = cti + R \operatorname{sen} pt\, j + R \cos pt\, k$, determine el radio de curvatura.

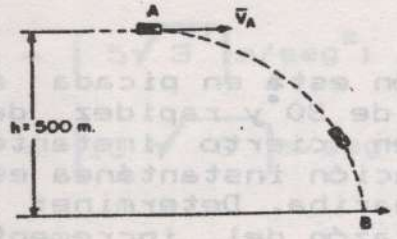
R: $\rho = R + (c^2/p^2R)$



1.34.- La partícula M se mueve a lo largo de la curva $y = (x^2 - 4)m$ con una rapidez constante de 3 m/seg. Determine sobre la curva el punto donde ocurre la máxima aceleración y calcule su valor.

R: $v(0; -4)$; $a_{max} = 18\ m/seg^2$

1.35.-



Se suelta un paquete desde un avión, que está volando con una velocidad horizontal constante de v_A = 50 m/seg. Determine las componentestangencial y normal de la aceleración y el radio de curvatura de la trayectoria del movimiento en el momento en que el paquete se suelta en A, donde h = 500m y cuando choque contra el suelo en B.

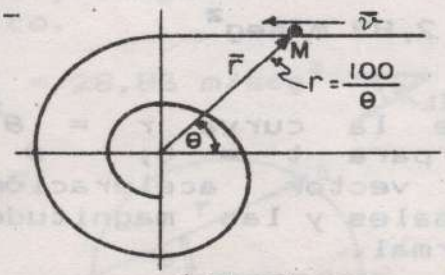
R: Pto A. $a_n = g = 9,8\ m/seg^2$; $a_t = 0$; $\rho = 255,10$ m.

Pto B. $a_n = 4,42\ m/seg^2$; $a_t = 8,75\ m/seg^2$; $\rho = 2783,04$ m

1.36.- La posición de una partícula puede definirse en términos de sus componetes rectangulares como $x = 3t$, $y = -4t$ y $z = 2t^2$ con x, y, z, en metros y t en segundos. Obtenga los vectores velocidad y aceleración de la partícula en función de sus coordenadas cilíndricas.

R: $\bar{v} = (5\bar{i}_r + 4t\bar{k})\ m/seg$; $\bar{a} = (4\bar{k})m/seg^2$

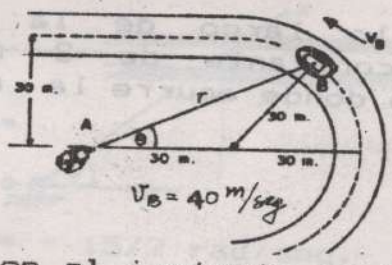
1.37.-



Una partícula M se mueve a lo largo de la espiral $r=(100/\theta)$m.m. con una rapidez constante de v = 200 m.m/seg. Determine las magnitudes de v_r y v_θ en función de θ.

R: $v_r = -200/\sqrt{1+\theta^2}$; $v_\theta = 200(\theta)/\sqrt{1+\theta^2}$

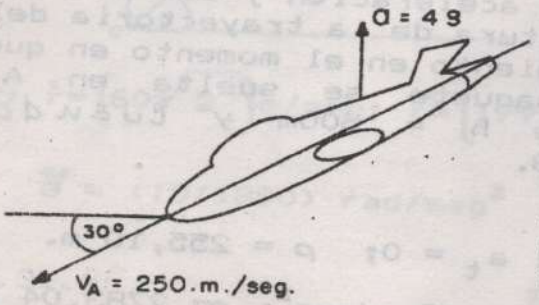
1.38.-



Un camarógrafo parado en A está siguiendo el movimiento de un carro de carrera B que está viajando alrededor de una pista curva con una rapidez constante de 40 m/seg. Determine la rapidez angular $\dot{\theta}$ a la que el hombre debe girar para mantener la cámara dirigida sobre el carro en el instante en que $\theta = 30°$.

R: $\dot{\theta} = 2/3$ rad/seg.

1.39.



Un avión está en picada a un ángulo de 30° y rapidez de 250 m/seg en cierto instante. Su aceleración instantánea es 4g, hacia aariba. Determine:
a) la razón del incremento de la rapidez.
b) el vector unitario normal a la trayectoria del avión y
c) el radio de curvatura de la trayectoria.

R: a) $a_t = 19,6\ m/seg^2$. b)

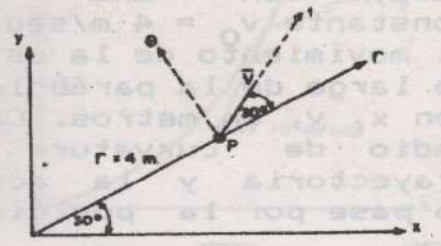
Forma un ángulo de 60° con la horizontal. c) $\rho = 1.841.09$ m.

1.40.- Una partícula se mueve en una trayectoria circular de 100 metros de radio hacia la izquierda. Parte de un punto que está horizontalmente a la derecha del centro de la trayectoria y se mueve de manera que el arco $s = 3t^2 + 6t$, está en metros y t en segundos. Determine las componentes horizontal y vertical de la aceleración cuando han transcurrido 3 segundos.

R: $a_H = -7,80\ m/seg^2$; $a_V = 2,89\ m/seg^2$.

1.41.- Una partícula recorre la curva $r = \theta^2$ con velocidad angular $\dot{\theta} = 2t$. Si para $t = 0$; $\theta = 0$; encuéntrese para $\theta = 1$ el vector aceleración en coordenadas radiales y tranversales y las magnitudes de la aceleración tangencial y normal.

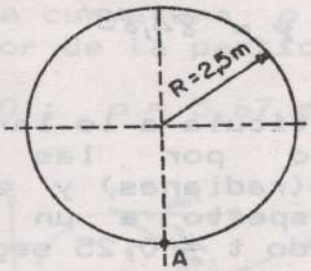
R: a) $\bar{a} = 8\bar{i}_r + 18\bar{i}_\theta$; $a = \left(34\sqrt{5}/5\right) m/seg^2$; $a_n = 12,52\ m/seg^2$

1.42.- 

En el instante mostrado en la figura, la partícula P tiene una velocidad v = 5 m/seg, c^{te} y las componentes de la aceleración son a_x =15 m/seg^2 y a_θ = -15 m/seg^2. Determinar a_r, a_y, a_t, a_n y el radio de curvatura de la trayectoria para dicha posición. Sugerencia: Dibuje las compoenetes de la aceleración total y calcule por geometría.

R: $a_r = \left(5\sqrt{3}\right)$ m/seg^2; $a_y = \left(-5\sqrt{3}\right)$ m/seg^2; $a_t = 0$;

$a_n = \left(10\sqrt{3}\right)$ m/seg ; $\rho = \left(5\sqrt{3}/6\right)$ m.

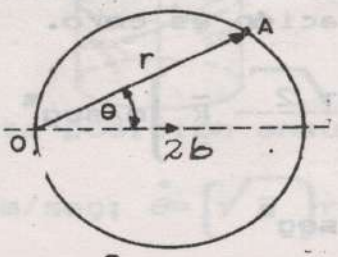
1.43.- 

Un auto pequeño parte del reposo en el punto A y se mueve en sentido antihorario sobre una pista circular. La velocidad del vehículo se incrementa uniformemente a razón de 0,5 m/seg^2. Calcule el vector velocidad del auto cuando la magnitud de la aceleración es 1,5 m/seg^2.

R: $\bar{v}$ = 1,88 $\angle 80,83°$

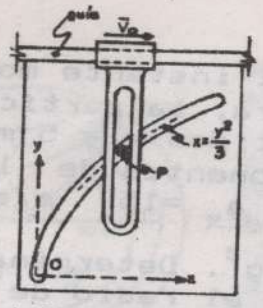
1.44.- Una partícula se mueve sobre una pista definida por $y = 0,6\,x^2$ con x, y, expresados en metros. Cuando la partícula se encuentra en el punto cuya abcisa es x=0,8 m la aceleración es $-40\bar{i}$ m/seg^2 y la rapidez de la partícula está disminuyendo. Calcule las componentes normal y tangencial de la partícula y represéntelas en un gráfico.

R: $\bar{a}_t$ = 28,86 m/seg^2 $\angle 43,83°$; $\bar{a}_n$ = 27,70 m/seg^2 $\angle 46,17°$

1.45.- 

La partícula A recorre la trayectoria circular en sentido antihorario con rapidez constante v. Calcule las componentes radial y transversal de la aceleración de A, en $f(\theta)$.

R: $a_r = -(v^2/b)\cos\theta$; $a_\theta = -(v^2/b)\,\mathrm{sen}\theta$.

1.46.- 

La abertura vertical se mueve hacía la derecha, sobre la guía, con una velocidad constante v_o = 4 m/seg y causa el movimiento de la esfera P a lo largo de la parábola $x=y^2/3$ con x, y, en metros. Calcule el radio de curvatura de la trayectoria y la aceleración tangencial delaesfera cuando pase por la posición donde y = 2 m.

R: ρ = 6,94 m ; a_t = 2,70 m/seg^2

1.47.- Una partícula Q viaja a lo largo de una trayectoria espiral elíptica de tal manera que su vector de posición está dado por $\bar{r}=[2\cos(0,1t)\bar{i}+ 1,5\text{sen}(0,1t)\bar{j} + (2t)\bar{k}\ ]$ metros con t en seg y ángulos en radianes. Cuando t = 10 segundos, determine los ángulos directores coordenados α, β, γ que el eje binormal al plano osculador forma con los ejes x, y, z.

R: α = 40,5° ; β = 130,54° ; γ = 84,83°

1.48.- El movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria fija está dado por las ecuaciones paramétricas r = 1,5(m); θ = 2t(radianes) y z = t^2(m). Detrmine el vector binormal respecto a un sistema de ejes coordenados x, y, z, cuando t = 0,25 segundos.

R: $\bar{B}$ = [0,35; ; 0,937]

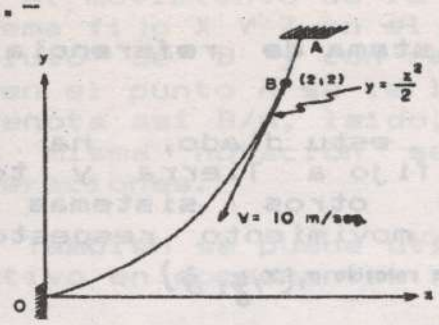
1.49.- Una partícula P se mueve a lo largo de la cardioide descrita por r=(5-3cosθ)m. y θ= $2\pi t^3$ (radianes) Determine los vectores velocidad y aceleración de P para t = 1 seg.

R: $\bar{v}$ =($12\pi\ \bar{i}_\theta$)m/seg ; $\bar{a}$ = ($36\pi^2\bar{i}_r + 24\pi\bar{i}_\theta$) m/seg^2

1.50.- Una partícula se mueve en el espacio de tal forma que: r = $2at^2$; θ = πt; z = $5t^2$; donde r y z están en metros, θ en radianes y t en segundos. Determine los vectores velocidad y aceleración en el instante en que la componente radial de la aceleración es cero.

R: $\bar{v} = \left[\frac{4\sqrt{2}a}{\pi}\bar{i}_r + \frac{4a}{\pi}\bar{i}_\theta + \frac{10\sqrt{2}}{\pi}\bar{k}\right]$m/seg^2

$\bar{a} = \left[8\sqrt{2}\,a\bar{i}_\theta + 10\bar{k}\right]$ m/seg^2

1.51.- 

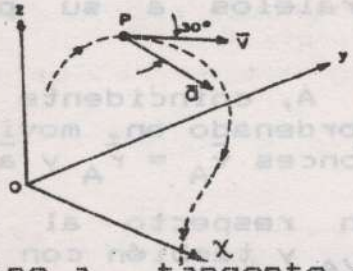
Una pequeña perla es obligada a moverse a lo largo de la trayectoria parabólica AO, con una velocidad constante de 10m/seg. Encontrar el vector velocidad y aceleración de la perla cuando pasa por el punto B. Además la magnitud de v_r y v_θ.

R: $\bar{v}_B = \left[-2\sqrt{5} \; ; \; -4\sqrt{5} \right]$ m/seg $\qquad v_r = 3\sqrt{10}$. m/seg

$\bar{a}_B = \left[-8 \; ; \; 4 \right]$ m/seg^2 $\qquad v_\theta = \sqrt{10}$. m/seg

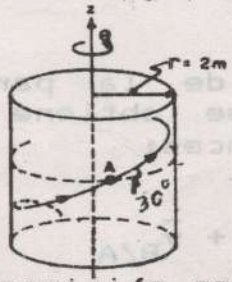
1.52.- La velocidad y aceleración de una partícula que se mueve sobre una curva en el espacio, en cierto instante son: $\bar{v} = (2\bar{i} - 3\bar{j} - 2\bar{k})$ m/seg y $a = (2\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k})$ m/seg^2. Demostrar que v y a son perpendiculares, usando este hecho para determinar $\dot{v}$. Determine el correspondiente radio de curvatura ρ de la trayectoria en el plano osculador de la partícula.

R: $\dot{v} = 0$; $\rho = 5{,}67$ m.

1.53.- 

La partícula P que se mueve a lo largo de la curva en el espacio tiene una $\bar{v}=(4\bar{i}+3\bar{j})$m/seg en dicha posición. En ese instante la aceleración a_p =10 m/seg^2 y forma un ángulo de 30° con v. Calcule el radio de curvatura medido en el plano osculador para ese instante y determine a_p tangente a esa trayectoria.

R: $\rho = 5$m ; $\left(a_t\right)_p = \left(5\sqrt{3}\right)$m/seg^2

1.54.- 

Una partícula se mueve a lo largo de la hélice cilíndrica mostrada. Cuando pasa por A la magnitud de la aceleración total es 10 m/seg^2 y la partícula incrementa su velocidad a lo largo de la trayectoria a razón de 8 m/seg^2 Para esta posición encuentre v, $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ y a_z.

R: v= 4m/seg; $\dot{\theta}=\left(\sqrt{3}\right)$rad/seg; $\ddot{\theta}=\left(2\sqrt{3}\right)$ rad/seg^2; a_z=4m/seg^2

1.9. Movimiento relativo a un sistema de referencia en movimiento de traslación.

El movimiento curvilíneo estu diado, ha sido respecto a un eje de referencia fijo a Tierra y tomado arbitrariamente. Al utilizar otros sistemas de refrencias, se considerarán en movimiento respecto al primero.

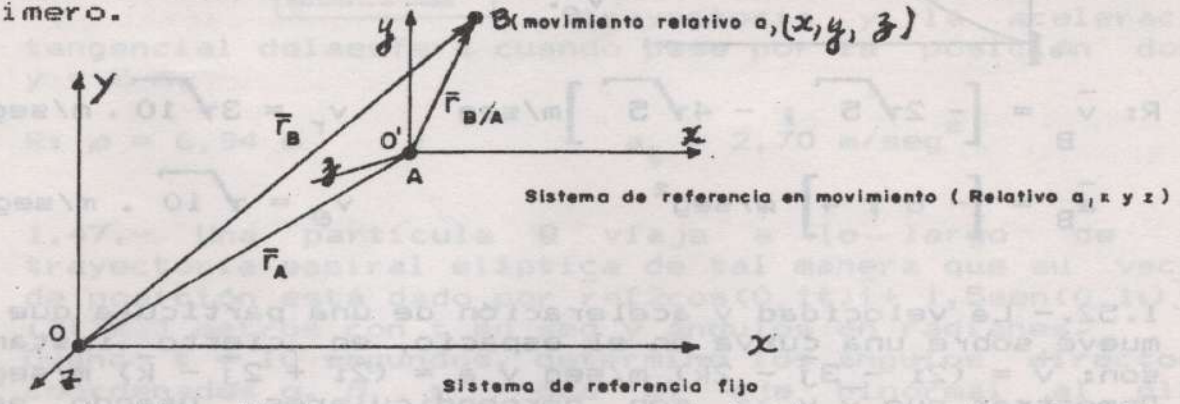


Fig. 1.11. Sistema xyz en movimiento de traslación respecto al sistema fijo XYZ.

En la Fig. 1.11 se asume que X Y Z es el sistema de coordenadas fijo a Tierra, x y z es el sistema de coordenadas en movimiento de traslación, ya que sus ejes coordenadas siempre permanecen paralelos a su posición anterior.

El vector $\bar{r}_A$ de la partícula A, coincidente con O' define la posición del sistema coordenado en movimiento, con respecto al sistema fijo, entonces $\bar{v}_A = \dot{r}_A$ y $\bar{a}_A = \ddot{r}_A$.

La partícula B se mueve con respecto al sistema móvil, su vector de posición es $r_{B/A}$ y también con respecto al sistema fijo y su vector de po sición es:

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{r}_{B/A} \qquad (1\text{-}35)$$

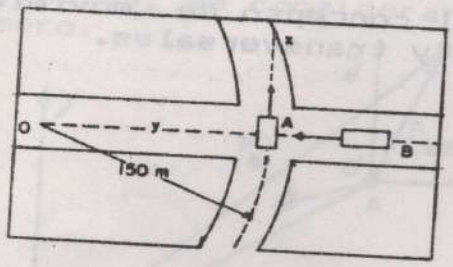
La velocidad y aceleración de la partícula B respecto al sistema fijo X Y Z se obtiene derivando respecto al tiempo la Ec. 1.35 entonces:

$$\bar{v}_B = \dot{\bar{r}}_B = \dot{\bar{r}}_A + \dot{\bar{r}}_{B/A} = \bar{v}_A + \bar{v}_{B/A} \qquad (1\text{-}36)$$

$$\bar{a}_B = \ddot{\bar{r}}_B = \ddot{\bar{r}}_A + \ddot{\bar{r}}_{B/A} = \bar{a}_A + \bar{a}_{B/A} \qquad (1\text{-}37)$$

Al movimiento de la partícula B, con respecto al sistema fijo X Y Z en el punto O se le llama movimiento absoluto de B y con respecto al sistema en movimiento xyz en el punto A se le llama movimiento relativo de B y se denota así B/A, leído, movimiento de B, respecto de A. Esta misma notación se utiliza para velocidades y aceleraciones.

También se puede utilizar el concepto de movimiento relativo en componentes radiales y transversales.



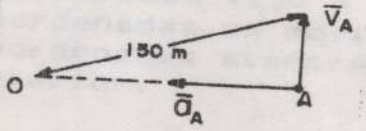
Ejemplo 1.17.

El auto A dá vuelta en una curva de 150 metros de radio con una velocidad constante de 54 Kms/hora. En el instante mostrado, el auto B se está moviendo a 81 Kms/hora pero disminuye su velocidad a razón de 3 m/seg^2. Determine los vectores velocidad y aceleración del auto A observadas desde el auto B.

Solución:

v_A= 54Kms/hora=15 m/seg=cte; v_B=81 Kms/hora=22,5m/seg

El diagrama vectorial de los dos carros es:



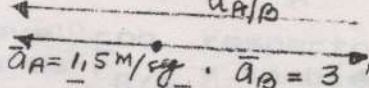
Pero $(a_A)_t = dv_A/dt = 0$

$(a_A)_n = v_A^2/\rho_A = (15)^2/150 = 1,5 m/seg^2$

$a_B = 3 m/seg^2$ según la Ec. (1-37)

$\bar{a}_A = \bar{a}_B + \bar{a}_{A/B}$ se tiene: $-1,5\bar{i} = 3\bar{i} + \bar{a}_{A/B} \Rightarrow \bar{a}_{A/B} = -4,5\bar{i}\ m/seg^2$

Diagrama vectorial de las aceleraciones

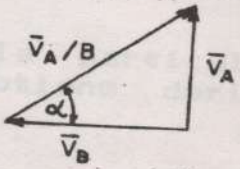


Para las velocidades $\bar{v}_A = \bar{v}_B + \bar{v}_{A/B}$ entonces

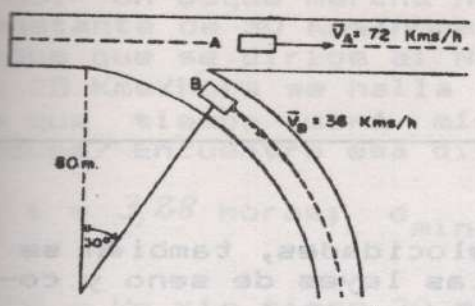
$$|\bar{v}_{A/B}| = \sqrt{v_A^2 - v_B^2} = \sqrt{(15)^2 + (22,5)^2} = 27,04\ m/seg$$

$$\bar{v}_{A/B} = (-22,5\bar{i} + 15\bar{j})\ m/seg$$

Diagrama vectorial de velocidades

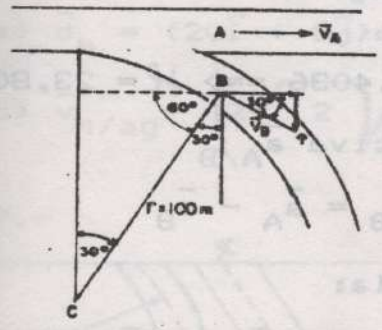


$$tg\alpha = v_A/v_B = 15/22,5 \Rightarrow \alpha = 33,69°$$



Ejemplo 1.18.

El auto A se está moviendo por una carretera recta mientras que el auto B se mueve a lo largo de una rampa de salida circular de 100 metros de radio. La velocidad de A está aumentando con una aceleración de 2 m/seg^2 y la velocidad de B está disminuyendo con una desaceleración de 1,52 m/seg^2. Para la posición mostrada: Determine los vectores velocidad y aceleración de A relativa a B.



Solución:

Auto A: $\bar{v}_A$=72Kms/h=20m/seg →

$\bar{a}_A$= 2 m/seg^2 →

Auto B: $\bar{v}_B$=36Kms/h=10m/seg ↘30°

Calculamos la aceleración del auto B.

$(a_B)_t$ = 1,5 m/seg^2 ↗30°

$(a_B)_n = v_B^2/r = (10)^2/(100) = 1 m/seg^2$ ←60°

$$(a_B) = \sqrt{(a_B)_t^2 + (a_B)_n^2} = \sqrt{(1,5)^2 + (1)^2} = 1,80 \text{ m/seg}^2$$

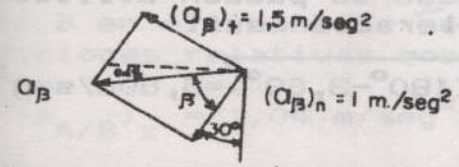


Diagrama vectorial de aceleración

$tg\beta = (a_B)_t/(a_B)_n = 1,5/1$ ===>

β= arc tg (1,5) = 56,31°

$\alpha = 60° - \beta = 60° - 56,31 = 3,69°$ por lo tanto $\bar{a}_B$=1,80 m/seg^2 ←3,69°

a) Cálculo de la velocidad relativa. $\bar{v}_{A/B}$

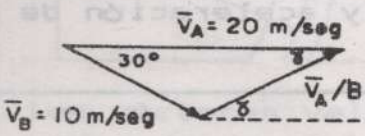
Se sabe que $\bar{v}_A = \bar{v}_B + \bar{v}_{A/B}$ y $\bar{v}_{A/B} = \bar{v}_A - \bar{v}_B$, utilizando vectores unitarios sería"

$$\bar{v}_{A/B} = 20\bar{i} - 10(\cos 30°\,\bar{i} - \text{sen}30\,\bar{j}) = (11,34\bar{i} + 5\bar{j}) \text{ m/seg}$$ ó

$$\bar{v}_{A/B} = 12,39 \text{ m/seg}$$ ↗23,79°

Continuación Ejemplo 1.18.

con el diagrama vectorial de velocidades, también se puede obtener $v_{A/B}$ utilizando las leyes de seno y coseno así:



Ley de cosenos.

$$v_{A/B} = \sqrt{(20)^2+(10)^2-2\times(20).(10)\cos 30^\circ}$$

$v_{A/B}$ = 12,39 m/seg.

Ley de senos.

sen δ/10= sen 30°/12,39; sen δ= 0,4036 ==> δ= 23,80°

b) Cálculo de la aceleración relativa $\bar{a}_{A/B}$

se sabe que $\bar{a}_A = \bar{a}_B + \bar{a}_{A/B}$ y $\bar{a}_{A/B} = \bar{a}_A - \bar{a}_B$

Utilizando vectores unitarios sería:

$$\bar{a}_{A/B}=2\bar{i}-1,8(-\cos 3,69^\circ\bar{i}-\text{sen } 3,69^\circ\bar{j})=(3,8\bar{i}+0,12\bar{j}) \text{ m/seg}^2$$

$\bar{a}_{A/B}$ = 3,80 m/seg^2 $\angle$ 1,75°

También las leyes de seno y coseno se pueden utilizar en el diagrama vectorial de aceleración así:

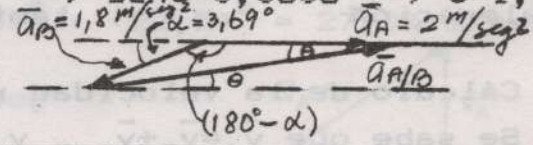
$$a_{A/B}= \sqrt{(1,8)^2+(2)^2-2(1,8)(2)\cos(180^\circ-3,69^\circ)}=3,80 \text{m/seg}^2$$

Ley de los senos.

senθ/1,8=sen(180-3,69)/3,8 ==> senθ=0,0305 ==> θ=1,75°

de ésta forma.

$\bar{a}_{A/B}$ = 3,80m/seg^2 $\angle$ 1,75°



1.55.- Un buque marcha hacia el Este con una velocidad constante de 30 Kms/hora. En un instante dado un segundo buque que se dirige al Norte con una velocidad constante de 25 Kms/hora se halla 200 Kms al Sur del primer buque. En que tiempo será mínima la distancia entre ambos buques? Encuentre esa distancia mínima.

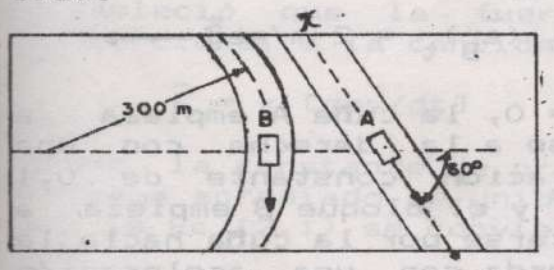
R: $t = 3,28$ horas; $d_{min} = 153,66$ Kms.

1.56.- Un río tiene 20 metros de ancho y el agua fluye hacia el sur con una velocidad promedio de 0,4 m/seg. Un hombre nada en la dirección 45° hacia el Norte a partir del Este y cruza el río en 30 seg. Calcule: a) El desplazamiento del hombre durante el intervalo de 30 seg; b) la velocidad del hombre con respecto al agua.

R: a) $\bar{d}_h = (20\bar{i} + 8\bar{j})m = 21,54$ m $\angle 21,80°$

b) $\bar{v}_{h/ag} = \left(2\sqrt{2}\right)\sqrt{3}\ \angle 45°$

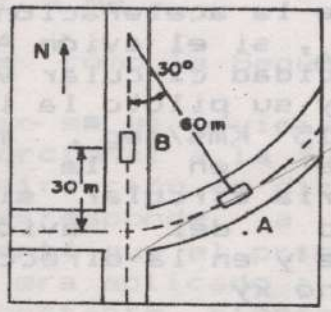
1.57.-



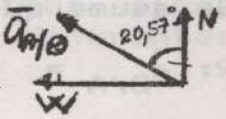
El auto A se mueve a una rapidez constante de 90 Kms/hora a lo largo de una carretera rectilínea y el B viaja a la misma rapidez en una carretera que es un arco circular de 300 metros de radio. Determine la componente x de la aceleración que tiene el auto A visto por un observador que no gire en el auto B en el instante en que ambos autos tienen las posiciones relativas mostradas.

R: $(a_{A/B})_x = 1,04$ m/seg^2.

1.58.-

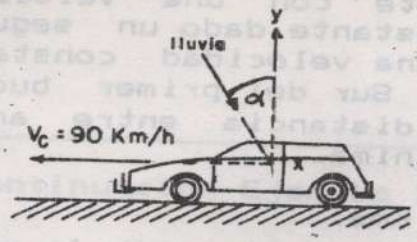


El auto A toma una curva de 60 metros de radio con una rapidez constante de 50 Kms/hora. Cuando A pasa por la posición indicada, el auto B está a 30 metros del cruce y está acelerando hacia el Sur a razón de 1,5 m/seg^2. Determine la aceleración que parece tener A cuando se observa desde B en ese instante.



R: $\bar{a}_{A/B} = 4,58$m/seg^2; 20,57° al Norte del Oeste.

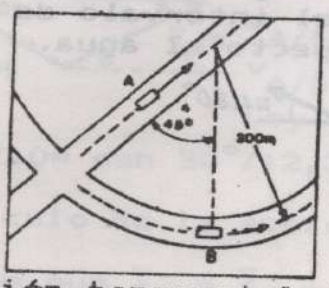
1.59.-



Un auto circula sobre una carretera horizontal con rapidez de 90 Kms/hora; los pasajeros que viajan en el vehículo observan que la lluvia que cae forma un ángulo α hacia adelante de la vertical, mientras que otra persona en reposo ve que cae en ángulo $\beta = 30^\circ$ hacia adelante de la vertical. Si se sabe que la rapidez absoluta de una gota de agua es de 25m/seg. calcule el valor del ángulo α y la velocidad del agua respecto al carro.

R: $\alpha = 60^\circ$; $\bar{v}_{a/c} = 43,30$

1.60.-

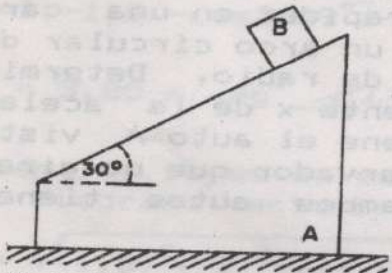


En el instante mostrado el auto A tiene una aceleración en la dirección de su movimiento y el auto B tiene velocidad de 72 Kms/hora que se está incrementando. Si la aceleración de B respecto al auto A es cero en ese instante, determine la aceleración del auto A y la aceleración tangencial del auto B.

R: $\bar{a}_A = \left(2\sqrt{2}\right)$ m/seg^2

; $(\bar{a}_B)_t = 2$ m/seg^2 ⟶

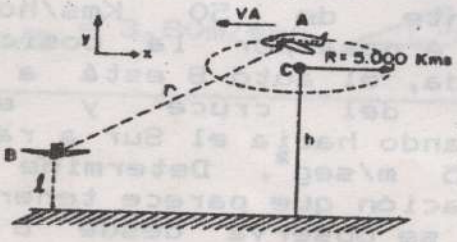
1.61.-



En t = 0, la cuña A empieza a moverse a la derecha con una aceleración constante de 0,1 m/seg^2 y el bloque B empieza a deslizarse por la cuña hacia la izquierda con una aceleración constante de 0,1 5 m/seg^2 relativa a la cuña. Determine, la aceleración del bloque B y la velocidad del bloque B cuando t = 4seg.

R: $\bar{a}_B = (-29,9\bar{i} - 75\bar{j})$ mm/seg^2 ; $\bar{v}_B = 322,96$ mm/seg. 68,26°

1.62.-



Determine la aceleración relativa $\bar{a}_{B/A}$, si el avión A tiene una velocidad circular $\bar{v}_A = -300\bar{i}$ Kms/seg y su piloto la incrementa en 15 Kms/seg^2, mientras permanece en la misma trayectoria circular siendo la velocidad del avión B, constante y en la dirección z. Se asume que B y C están en el plano xy

R: $\bar{a}_{B/A} = \left(15\bar{i} - 18\bar{k}\right)$ Kms/seg^2.

CAPITULO 2

2.1.- Cinética de partículas - Leyes de Newton del movimiento.

La cinética estudia la relación entre el sistema resultante de fuerzas asociadas con el movimiento de los cuerpos que no se encuentran en equilibrio - Definiendo la fuerza como cualquier medio que modifica o tiende a modificar el estado de reposo o de movimiento de un cuerpo.

Los principios fundamentales de la cinética de partículas fueron establecidas por Sir Isaac Newton (1642-1727), originando las Leyes de Newton, que rigen el estudio de las fuerzas y el movimiento de los cuerpos.

Primera Ley.- Todo cuerpo tiende a permanecer en su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta, a menos que haya fuerzas que lo obliguen a cambiar tal estado.- Ejemplo. Un libro ubicado sobre una mesa se queda, a menos que alguien lo mueva.
↳ quieto.

Segunda Ley.- Isaac Newton, en su celebrado PRINCIPIA, estableció que la fuerza ejercida era directamente proporcional a la cantidad de movimiento, esto es,

$$\bar{F} = k\,[d\bar{m}\bar{v}/dt] \qquad (2-1)$$

donde la constante de proporcionalidad es k = 1, para un sistema apropiado de unidades.
asi la Ec (2.1) se convierte en,

$$\bar{F} = \frac{d\,(\bar{m}\bar{v})}{dt} = m\,\frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{v}\,\frac{dm}{dt} \qquad (2-1')$$

para m = constante, resulta,

$$\bar{F} = \bar{m}\bar{a} \qquad (2-2)$$

conocida como la Segunda Ley de Newton, cuyo enunciado es:
El cambio en el movimiento (o aceleración) de un cuerpo, es proporcional a la fuerza que lo produce y tiene lugar en la dirección de dicha fuerza. Pero en realidad esta Ley corresponde a Leonhard Euler 1.752, cuando experimentó que el principio de la cantidad de movimiento lineal era aplicado a sistemas mecánicos de todo tipo, con m constante, siendo sus ecuaciones en los diferentes ejes.

$$F_x = m\,a_x \;;\; F_y = m\,a_y \;;\; F_z = m\,a_z \qquad (2\text{-}3)$$

cabe enfatizar que el adecuado uso del diagrama de cuerpo libre garantiza la exitosa aplicación de la Segunda Ley de Newton.

Por ejemplo, un observador fijo en un sistema de referencia Newtoniano o inercial, comprueba que la Segunda ley de Newton para una partícula se verifica asi:

$$\bar{a}_p = \bar{F}/m$$

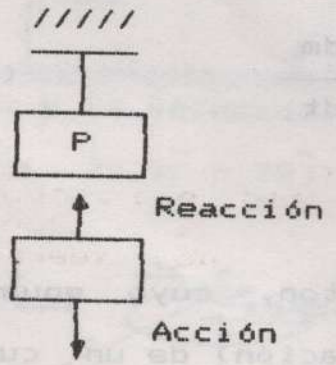
Si este mismo observador ve la partícula desde un sistema móvil su aceleración es $\bar{a}_{p/m}$

y si $\bar{a}_m$ es la aceleración del sistema de referencia móvil, entonces,

$$\bar{a}_p = \bar{a}_m + \bar{a}_{p/m}$$

la aceleración $\bar{a}_{p/m}$ satisface la Segunda Ley de Newton únicamente cuando a_m es nula o cuando la velocidad Vm del sistema de referencia móvil es constante,

Tercera Ley.- Si un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, el segundo ejerce siempre sobre el primero otra fuerza de la misma magnitud pero de sentido opuesto.



Aunque la primera y tercera leyes de Newton se considerarán en Dinámica, la Segunda Ley de Newton es fundamental en la mayor parte de este estudio y tiene aplicaciones además en cuerpos rígidos, sólidos deformables y fluidos.

2.2.- Diferencia entre masa y peso.-

Generalmente usamos indistintamente las palabras "masa" y peso para significar lo mismo, sin embargo, debemos distinguir, pues masa y peso no son la misma cosa.

Supongamos un Newton de plomo. Su masa es un Kilogramo porque está compuesto de un número determinado de partículas que forman un kilogramo. Su peso es un Newton porque la tierra lo atrae con la fuerza de un Newton.

La masa de los cuerpos no varía, esté donde esté, ya que el número de partículas de ellos no varía en ninguna parte.

El peso de un cuerpo es la fuerza con que lo atrae la tierra hacia su centro y depende de su masa, la masa de la tierra y la distancia del cuerpo al centro de ella. A menor distancia del centro de la tierra mayor peso y reciprocamente.

La masa es entonces la oposición que presenta el cuerpo al movimiento o la medida cuantitativa de la inercia.

La fuerza $\bar{W}$ calculada por la Segunda Ley de Newton es:

$$\bar{W} = m\bar{a} = m\bar{g}$$

siendo, m = masa del cuerpo y g(m/seg²) = Aceleración de la gravedad.

2.3.- Ecuaciones de Movimiento.-

Cuando son varias las fuerzas que actuan sobre una partícula de masa m, la Ec. (2-2) puede expresarse por un número cualquiera de fuerzas concurrentes $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$ ------- $\bar{F}_n$ así:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = m\bar{a} = \bar{R} \qquad (2-5)$$

llamada ecuación de movimiento- La aceleración es causada por la fuerza resultante. Fig. 2.1.

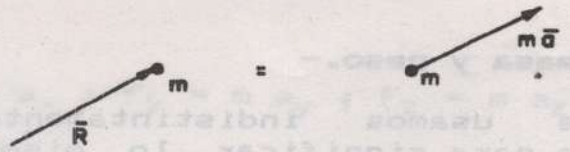


Fig. 2.1 Diagrama cinético

El vector $m\bar{a}$, que es el efecto de la fuerza resultante, se llama frecuentemente fuerza efectiva sobre la partícula.

En la solución de los problemas en cinética, es mas conveniente descomponer la Ec. (2.-5) en un sistema de ecuaciones escalares, usando los diferentes sistemas de coordenadas.-

2.3.1.- **Coordenadas rectangulares.-** Descomponiendo las fuerzas y la aceleración en sus componentes x, y, z, se tiene:

$$\Sigma\ (F_x\bar{i} + F_y\bar{j} + F_z\bar{k}) = m\ (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}) \qquad (2\text{-}6)$$

en forma escalar son:

$$\Sigma F_x = m\ddot{x} \qquad \Sigma F_y = m\ddot{y} \qquad \Sigma F_z = m\ddot{z} \qquad (2\text{-}6.b)$$

que pueden integrarse sucesivamente para expresar la velocidad y posición de la partícula en función del tiempo.

2.3.2.- **Coordenadas Normal y tangencial.-**

Para un movimiento curvilíneo en el plano, la Ec. (2 - 5) puede expresarse en términos de sus coordenadas normal y tangencial. Fig. 2.2.a.

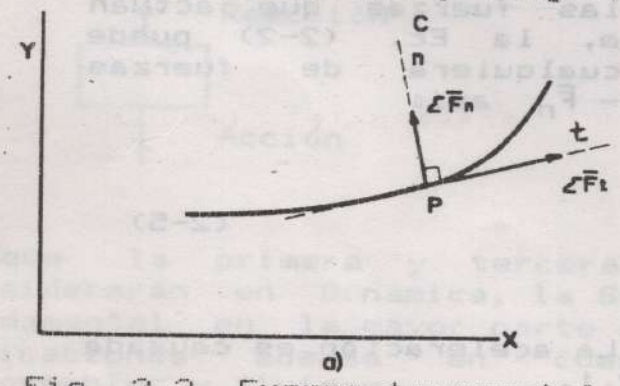
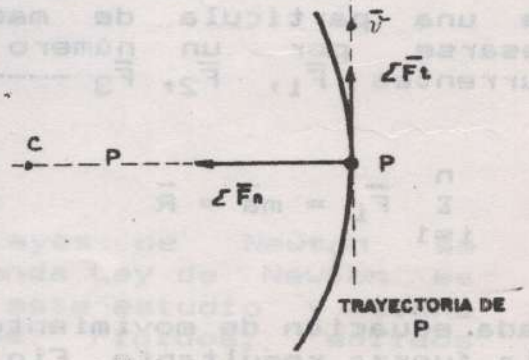


Fig. 2.2. Fuerza tangencial y normal en trayectorias curvas.



Fuerzas normales y tangenciales en un movimiento curvilíneo

Las coordenadas normal y tangencial son muy útiles cuando el movimiento es circular donde ρ = constante.

Las coordenadas escalares de la ecuación (2-5) son:

$$\Sigma (F_t \bar{T} + F_n \bar{N}) = m (a_t \bar{T} + a_n \bar{N}) \qquad (2\text{-}7)$$

$$\Sigma F_t = ma_t = m (dv/dt) = mv (dv/ds) \qquad (2\text{-}7a)$$

$$\Sigma F_n = ma_n = m (v^2/\rho) \qquad (2\text{-}7b)$$

En la Fig. 2.2b la componente normal $\Sigma \bar{F}_n$ está dirigida siempre hacia el centro de curvatura C y se llama fuerza centrípeta. La fuerza igual pero opuesta ejercida por la partícula sobre la restricción se llama fuerza centrífuga. La componente tangencial $\Sigma \bar{F}_t$ es colineal al vector velocidad

2.3.3.- **Coordenadas radial y transversal.-** (coordenadas polares).

Para el movimiento en el plano de la partícula P, sobre una trayectoria curvilínea, Fig. 2.3, las componentes de la Ec.(2.-5) se pueden escribir en función de las coordenadas de r y θ así:

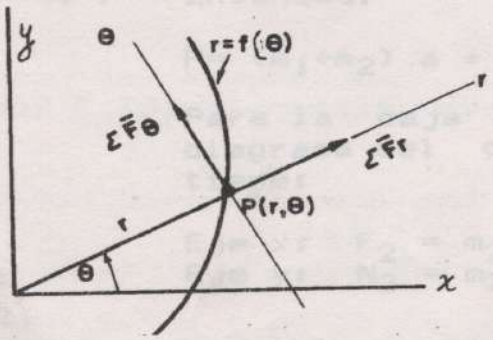


Fig. 2.3.- Fuerzas radiales y transversales en un movimiento curvilíneo.

$$\Sigma (F_r \bar{i}_r + F_\theta \bar{i}_\theta) = m (a_r \bar{i}_r + a_\theta \bar{i}_\theta) \qquad (2\text{-}8)$$

$$\Sigma F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \qquad (2\text{-}8a)$$

$$\Sigma F_\theta = ma_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \qquad (2\text{-}8b)$$

2.3.4.- Coordenadas Cilíndricas.-

Cuando las fuerzas que actuan sobre una partícula se descomponen en las direcciones radial, transversal y axial Fig. 2.4, la Ec. (2-5) puede expresarse así:

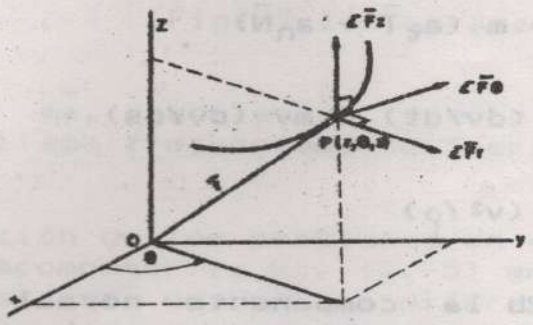


Fig. 2.4. Fuerzas en coordenadas cilíndricas.

$$\Sigma\ (F_r \bar{i}_r + \bar{F}_\theta \bar{i}_\theta + F_z \bar{k}) = m\ (\bar{a}_r \bar{i}_r + a_\theta \bar{i}_\theta + a_z \bar{k}) \qquad (2\text{-}9)$$

y la ecuación (2.8) puede escribirse en términos de las siguientes tres ecuaciones escalares:

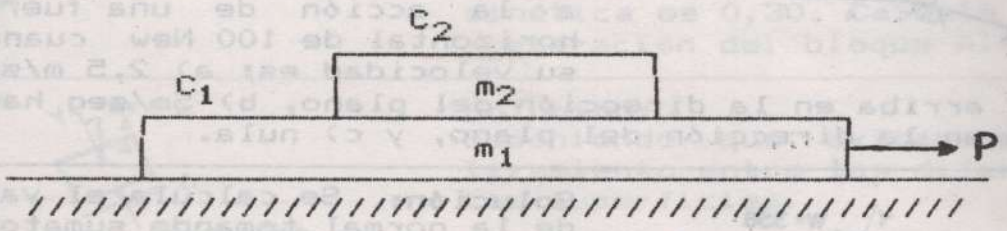
$$\Sigma\ F_r = ma_r = m\ (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \qquad (2\text{-}9a)$$

$$\Sigma\ F_\theta = ma_\theta = m\ (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \qquad (2\text{-}9b)$$

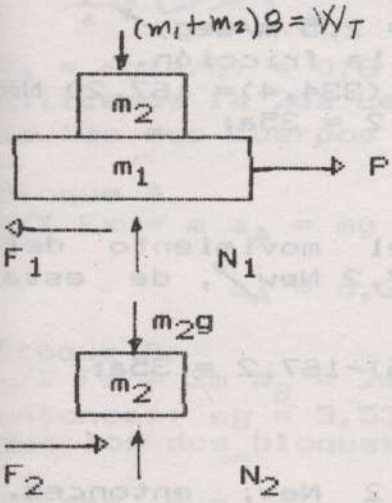
$$\Sigma\ F_z = ma_z = m\ddot{z} \qquad (2\text{-}9c)$$

Ejemplo 2.1

Una caja de masa m_2 descansa sobre otra caja de masa m1. El coeficiente de fricción estática entre las dos cajas es μ_2 y el coeficiente de fricción de deslizamiento entre la caja 1 y el piso es μ_1. Una fuerza horizontal P es aplicada a la caja 1. Si la caja 2 no se desliza sobre la caja 1, determine el valor máximo de P.



Solución: como la caja de masa m_2 no desliza, ambas cajas de masa m_1 y m_2 tienen la misma aceleración a.i Del diagrama del cuerpo libre se tiene:



Eje x: $P-F_1 = (m_1 + m_2)\, a$ (1)

Eje y: $N_1 = (m_1 + m_2)g$ (2)

$F_1 = (\mu_1 N_1$

Entonces:

$P = (m_1+m_2)\, a + m_1\, (m_1+m_2)$ (3)

Para la caja de masa m_2, del diagrama del cuerpo libre se tiene:

Eje x: $F_2 = m_2\, a$

Eje y: $N_2 = m_2\, g$

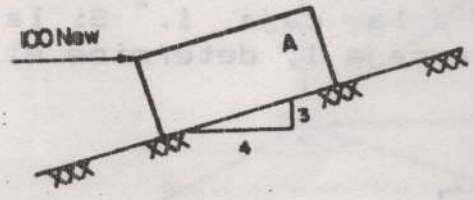
Para P_{max} ====> $F_2 = \mu_2 m_2 = \mu_2 m_2 g$

====> $\mu_2\, m_2 g = m_2 a$ osea $\boxed{a = \mu g}$

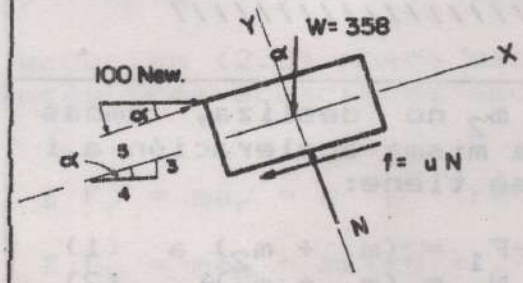
Sustituyendo pasa $a = \mu_2 g$ en la Ec (3), se tiene:

$$P_{max} = (\mu_1 + \mu_2)\, (m_1 + m_2) g$$

Ejemplo 2.2



El bloque A tiene una masa de 35 kgs. y su coeficiente de fricción con la superficie inclinada es 0,50. Calcule la aceleración de A sometido a la acción de una fuerza horizontal de 100 New cuando su velocidad es: a) 2,5 m/seg hacia arriba en la dirección del plano, b) 5m/seg hacia abajo en la dirección del plano, y c) nula.



Solución: Se calcula el valor de la normal tomando sumatoria de F en la dirección y, así
+ $\Sigma F_y = 0$; $N - W\cos\alpha - 100\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0$
$N = 35g\ 4/5 + 100\ (3/5) =$
$28 \times 9{,}8 + 60 = 334.40$ New.

a) Para $\bar{v} = 2{,}5$ m/seg ↗
Calculamos la fricción.
$F = \mu N = 0{,}5\ (334{,}4) = 167{,}20$ New

$+\Sigma F_x = ma; \quad 100(4/5) - 35g(3/5) = -167{,}2 = 35a;$

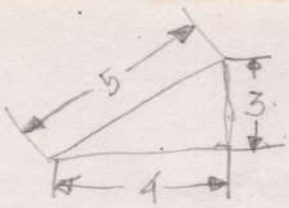
$\bar{a} = 8{,}37$ m/seg² ↖

b) Para $\bar{v} = 5$m/seg ↙, suponemos el movimiento del cuerpo hacia abajo, siendo f= 167,2 New ↗, de esta forma:

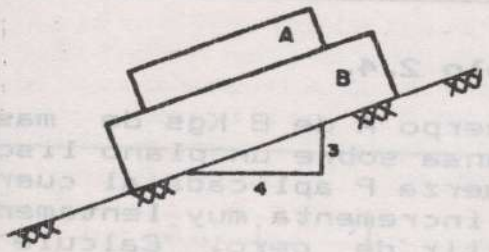
$+\swarrow \Sigma F_x = ma$; entonces $35g - 100(4/5) - 167{,}2 = 35a;$

$\bar{a} = 1{,}18$ m/seg² ↖

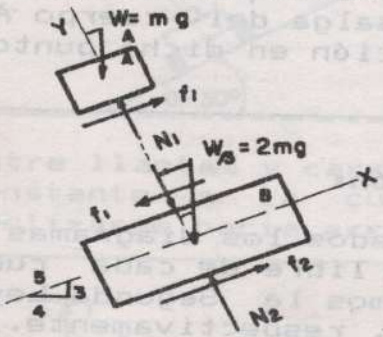
c) Se asume $a = 0$ si $f < \mu N = 167{,}2$ New, entonces,
$+\nearrow \Sigma F_x = 0 = 100\ (4/5) - f - 35g\ (3/5) = 0$ de donde
$f = -125{,}8$ New
$|f| < \mu N = 167{,}2$ New por lo tanto el cuerpo no baja y su $a = 0$



Ejemplo 2.3.



Los bloques A y B parten del reposo en la posición representada. La masa de B es el doble de la masa de A. El coeficiente de fricción estática es 0,40 para todas las superficies y el coeficiente de fricción cinética es 0,30. Calcule la aceleración del bloque A.



Solución:

Suponiendo que exiten deslizamiento entre las diferentes superficies.

$f_1 = 0,3\ N_1$; $f_2 = 0,3\ N_2$

$a_A > a_B > 0$

$+\uparrow \Sigma Fy = 0$ para cada cuerpo, se tiene:

$N_1 = mg(4/5) = 0,8\ mg$; $N_2 = N_1 + 2mg(4/5) = 2,4\ mg$.

aplicamos la 2da Ley de Newton al diagrama libre de los dos cuerpos separadamente.

Bloque A.

$+\nearrow \Sigma\ Fx = m\ a_A = mg\ (3/5) = 0,3\ (0,8\ mg)$ de esta forma

$$a_A = 0,36g = 3,53\ m/seg^2$$

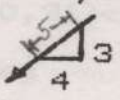
Bloque B:

$+\nearrow \Sigma\ Fx = 2m\ a_B = 2mg(3/5) + 0,3(0,8\ mg) - 0,3\ (2,4\ mg)$

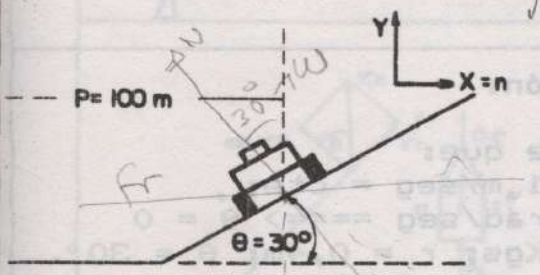
entonces: $a_B = 3,53\ m/seg^2$. Como $a_A = a_B$ se concluye que los dos bloques deslizan juntos.

Nótese que $f_1 < \mu_{est}\ N_1 = 0,4\ N_1$ por lo tanto

$$\bar{a}_A = 3,53\ m/seg^2$$

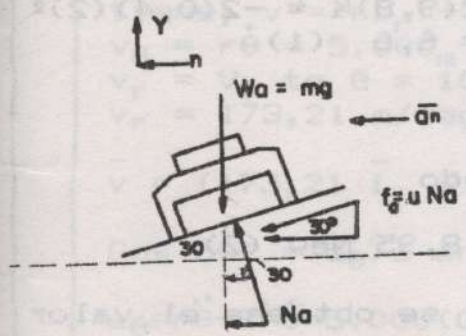


Ejemplo 2.5.



Un auto de carreras que tiene una masa de 1 .500 Kgs, está viajando horizontalmente a lo largo ade una pista circular con un ángulo de sobre elevación de 30° y un radio de curvatura de 100m. Si $\mu = 0,2$ entre llantas y carretera determine la máxima rapidez constante a la cual puede viajar el auto sin deslizarse hacia arriba de la pendiente.

Solución:



La máxima velocidad del auto se obtiene cuando $f_a = \mu Na$. Se está tomando los signos de los ejes de acuerdo al diagrama de la figura se tiene:

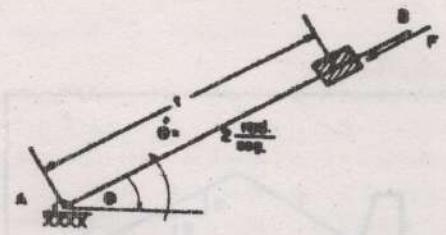
$+\uparrow \Sigma F_y = ma_y = 0$ así:

$$NaCos30° - (\mu Na)sen30° - mg = 0; Na = \frac{1500 \times 9,8}{[\sqrt{3}/2 - 0,2(\frac{1}{2})]} = 19.090,91N$$

$$\pm \Sigma F_n = ma_n = m\, v^2/\rho .$$

$$19.090,91(sen30) + 0,2(19.090,91)cos30° = 1500v^2 max/100$$

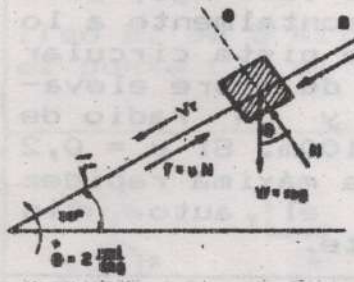
$$v_{max} = 29,29 \text{ m/seg}$$



Ejemplo 2.6.

Un bloque de masa 2 Kgs. se desliza sobre la barra AB, la cual rota en el plano vertical con $\dot{\theta} = 2$ rad/seg en sentido antihorario. Una fuerza radial F le imprime al bloque una rapidez de 1m/seg hacia adentro de la barra. Cuando $\theta = 30°$ entonces $r = 0,4$m. Calcule el valor de F si $\mu = 0,10$.

Solución:



Se sabe que:

$\dot{r} = -1$ m/seg = cte; $\ddot{r} = 0$

$\dot{\theta} = 2$ rad/seg $\Longrightarrow \ddot{\theta} = 0$

$m = 2$ Kgs; $r = 0,4$m; $\theta = 30°$.

$\mu = 0,10$

$+\nearrow \Sigma F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$

$0,1N - F - mg \operatorname{sen} 30° = -mr\dot{\theta}^2$

Reemplazando

$0,1N - F - 2(9,8)\frac{1}{2} = -2(0,4)(2)^2$

$0,1N - F = 6,6 \quad (1)$

$+\nwarrow \Sigma F_\theta = m\,a_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$

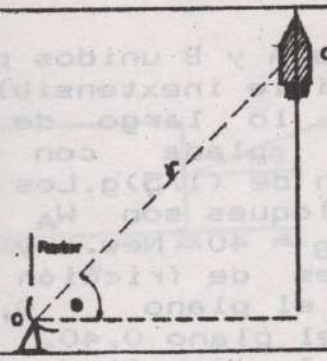
$N - mg\cos 30° = 2\dot{r}\dot{\theta}\,m$ Reemplazando

$N = 21.(-1)\,(2)2 + 2 \times 9,8\,\sqrt{3}/2 = 8,95$ New (2)

Reemplazando la Ec(2) en la Ec (1) se obtiene el valor de F así:

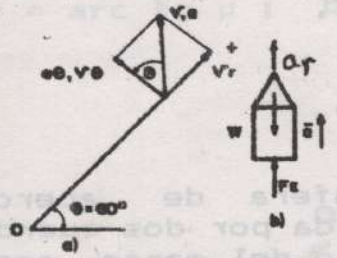
$F = 0,1\,(8,95) - 6,6 = -5,70$ New o sea

$\bar{F} = 5,70$ New $\measuredangle 30°$



Ejemplo 2.7.

Un cohete disparado verticalmente es seguido por un radar Determine el vector velocidad y el empuje en el cohete de 60.000 Newtons de peso, si cuando $\theta = 0{,}003$ rad/seg^2
$g = 9{,}8$ m/seg^2 = cte



Solución:

Se sabe que Wc = 60.000 New;

$\theta = 60°$; $r = 5.000$ m;

$\dot{\theta} = 0{,}02$ red/seg ;

$\ddot{\theta} = 0{,}003$ red/seg^2; utilizando las ecusciones de $\bar{v}$ y $\bar{a}$ en coordenadas polares se tiene; $\bar{v} = \dot{r}\bar{i}_r + r\dot{\theta}\bar{i}_\theta$ por lo tanto

$v_\theta = r\dot{\theta} = 5.000_m\ (0{,}02)$rad/seg = 100 m/seg;
$v_r = V_\theta \operatorname{tg}\theta = 100$ m/seg tg 60° = 173,21
$v_r = 173{,}21$ m/seg = r

$\bar{v} = (173{,}21\ \bar{i}_r + 100\ \bar{i}_\theta)$ m/seg.

Cos 60° = a_θ/a entonces $a = a_\theta/\cos 60°$ pero

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 5.000(0{,}003) = 2(173{,}21)0{,}02) = 21{,}93$ m/seg^2

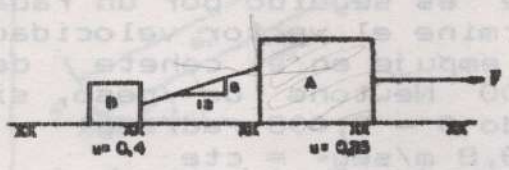
$$a = \frac{21{,}93}{0{,}5} = 43{,}86 \text{ m/seg}^2;\quad \bar{a} = 43{,}86 \text{ m/seg}^2 \uparrow .$$

En la Fig. b, utilizando la 2da Ley de Newton se tiene

$$+\uparrow \Sigma F_y = m_e\, a\ ;\quad F_E - W_c = \frac{W_c}{g}\, a, \text{de donde}$$

$$\bar{F}_E = W_c\ (1 + a/g) = 60.000\ (1+43{,}86/9{,}8)\text{New} = 328{,}5\text{kn}.\uparrow$$

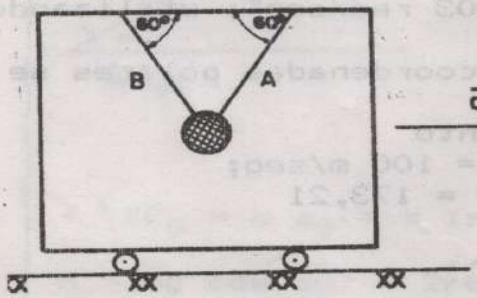
2.1.-



Dos bloques A y B unidos por un cable flexible inextensible se mueven a lo largo de una superficie plana con una aceleración de (1/5)g. Los pesos de los bloques son W_A = 90 Newtons W_B = 40 New. y los coeficientes de fricción son: entre A y el plano 0,25 y entre B y el plano 0,40.
Determine la magnitud de la fuerza F.

R: F = 63,21 Newtons.

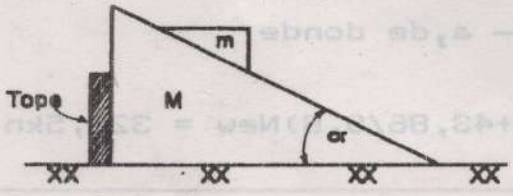
2.2.-



Una esfera de acero está suspendida por dos cuerdas A y B, dentro del marco acelerado. Determine la aceleración a del marco, que causa una tensión en A igual a dos veces la tensión en B.

R: $a = \frac{\sqrt{3}}{9} g = (0,19)g.$

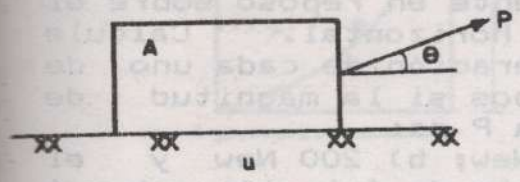
2.3.-



Dos cuñas descansan sobre un plano horizontal liso, existiendo un tope para la cuña mayor.
Determine la fuerza que ejerce el tope cuando la cuña menor se mueve:
a) Si las superficies de las cuñas son lisas ($\mu = 0$).
b) Si el coeficiente de fricción entre las cuñas es μ.

R: a) $P = (mg \cos\alpha) \operatorname{sen}\alpha$.
b) $P = (mg \cos\alpha)(\operatorname{sen}\alpha - \mu \cos\alpha)$.

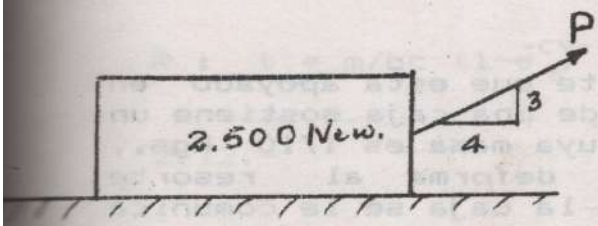
2.4.-



Un cuerpo A de masa m(Kgs) se mueve inicialmente hacia la derecha bajo la acción de la fuerza P, siendo el coeficiente de fricción entre A y el plano horizontal μ. Calcule:
a) El ángulo θ para el cual la aceleración es máxima;
b) La magnitud de la aceleración correspondiente.

R: a) $\theta = \text{arc tg } \mu$; b) $a_x = (P/m \sqrt{(1 + \mu^2)} - \mu g$

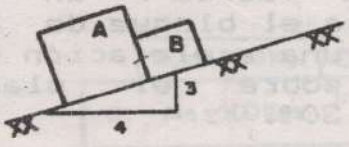
2.5.-



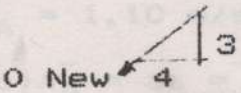
Si la fuerza $P = 10^3$ Newtons y el coeficiente de fricción cinética es 0,5. Encuentre la aceleración del cuerpo bajo las siguientes condiciones:
a) El cuerpo se mueve hacia la derecha.
b) El cuerpo se mueve hacia la izquierda.
c) El cuerpo parte del reposo.

R : a) $a = -0{,}59$ m/seg²
b) $a = -7$ m/seg²
c) $a = 0$

2.6.-

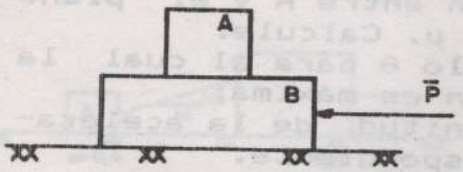


Los bloques A y B tienen una masa de 15 Kgs. y 10 Kgs. respecticamente Los coeficientes de fricción son 0,50 entre A y el plano inclin ado y 0,20 entre B y el plano inclinado.
Calcule la magnitud de la fuerza resultante entre los bloques al dejarlos libres. A y B estan en reposo inicialmente. Asumiendo que se deslizan juntos.



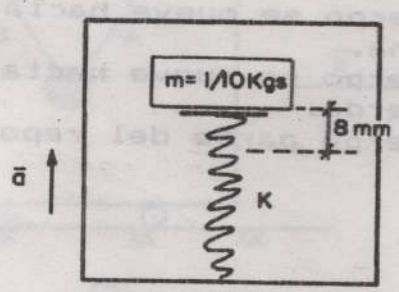
R : $\bar{P} = 14{,}10$ New

2.7.- Los cuerpos A y B de la figura tienen masas de 15 y 35 Kgs respectivamente, encontrándose inicialmente en reposo sobre el plano horizontal. Calcule la aceleración de cada uno de los cuerpos si la magnitud de la fuerza P es:
a) 100 New; b) 200 New y el coeficiente de fricción entre A y B es 0,30.



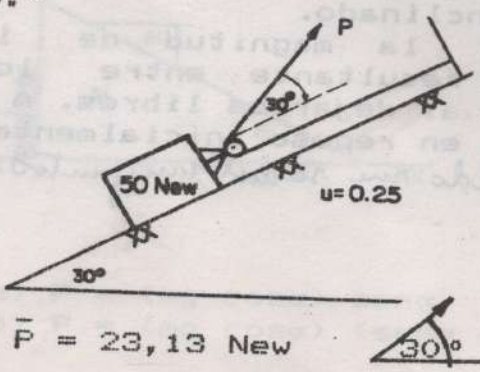
R : a) $\bar{a}_A = \bar{a}_B = 2$ m/seg² ⟵ b) $\bar{a}_A = 2{,}94$ m/seg² ⟵
$\bar{a}_B = 4{,}45$ m/seg² ⟵

2.8.- Un resorte que está apoyado en el piso de una caja sostiene un cuerpo cuya masa es 1/10 Kgs., el cual deforma al resorte 8 mm cuando a la caja se le comunica una aceleración hacia arriba. Calcular la constante K del resorte que permitiría que este se deforme 8 mm. más allá de la posición de equilibrio (a=0) cuando la aceleración que crece lentamente alcance el valor de 8g.

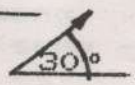


R: $k = 10^3$ New/m.

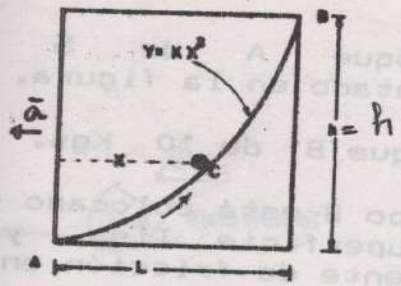
2.9.- Determine la fuerza P en el cable que jala el bloque de 50 Newtons, con una aceleración de 2 m/seg² sobre el plano inclinado de 30°.



R: $\bar{P} = 23{,}13$ New



2.10.-



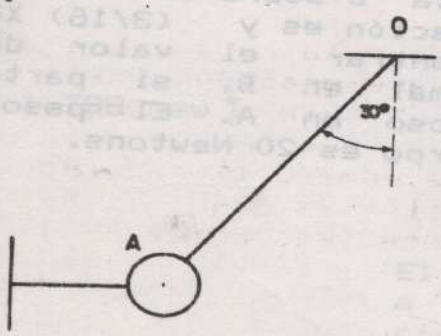
La curva AB es una parábola con vértice en A y ecuación $y=kx^2$. Al acelerar la curva hacia la izquierda, la esfera que se representa sobre la curva AB, adquiere el equilibrio a una distancia x del extremo del marco.
Exprese la aceleración del marco en función de x, L y h.

R : $a = \dfrac{2hxg}{L^2}$

2.11.- Un cuerpo, cuya velocidad inicial era $v_o.\bar{i}$, está sometido a la acción de una fuerza $\bar{F} = -b.e^{-cv}.\bar{i}$, en la cual b y c son constantes conocidas. Encuentre el tiempo necesario para que el cuerpo se detenga.

R : $t_{max} = m/bc\ (1-e^{-cv_o}.)$

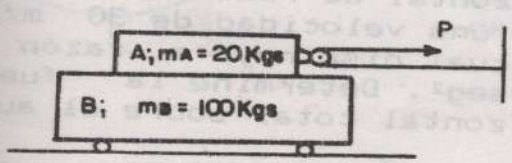
2.12.-



Un péndulo se sostiene en reposo en la posición mostrada mediante la cuerda horizontal. Si de repente se corta la cuerda, ¿por qué factor quedará momentáneamente reducida la tensión original en alambre OA (Factor de reducción = $(T_1 + T_2 / T_1)$.

R: F . R = 1/4. = Factor de reducción.

2.13.-

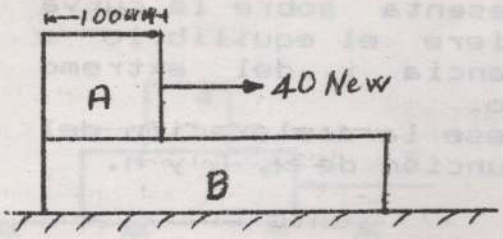


Si el coeficiente de fricción entre el bloque A y el bloque B es 0,50, calcule la aceleración de cada bloque para:
a) P = 60 New. ; b) P = 40 New

R : a) $\bar{a}_A = 1,10$ m/seg ——>; $\bar{a}_B = 0,98$ m/seg² --->

b) $\bar{a}_A = a_B = \bar{0},67$ m/seg².

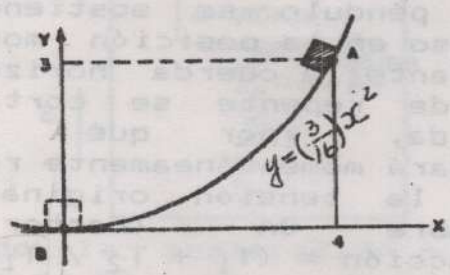
2.14.- El bloque A de 5 Kgs. representado en la figura, mide 100 mm.
El Bloque B de 10 Kgs. mide 300 mm.
El cuerpo B está colocado sobre una superficie lisa, y el coeficiente de fricción entre A y B es 0,40. Los bloques están en reposo cuando al cuerpo A se aplica una fuerza horizontal de 40 New. Calcule el tiempo que demora el bloque A en desplazarse hasta el extremo opuesto y la distancia que se desplaza B durante el mismo intervalo de tiempo. $g = 10\ m/seg^2$



R: a) t = 0,45 seg.

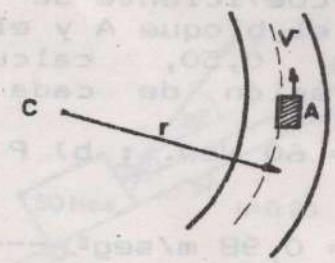
b) X_B = 2 cms.

2.15.- Un cuerpo se desliza desde A hasta B sobre la curva cuya ecuación es $y = (3/16)X^2$. Encontrar el valor de la normal en B, si parte del reposo en A. El peso del cuerpo es 20 Newtons.



R: N = 65 Newtons

2.16.- Un auto A de 1000 Kgs de masa se mueve sobre una vía horizontal de radio 100 metros, con una velocidad de 30 m/seg la cual disminuye a razón de 5 m/seg^2. Determine la fuerza horizontal total sobre el auto.



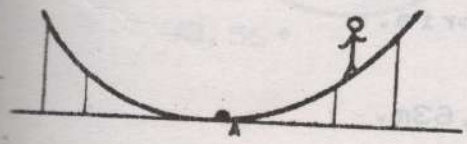
R : $\bar{F}_H$ = 10.295,63 Newtons

2.17.-

Un bote con motor fuera de borda viaja a una velocidad de 20 m/seg sobre una trayectoria circular de 15 metros de radio. Determine el ángulo θ necesario del bote con la horizontal para que los pasajeros no tengan la tendencia a deslizarse sobre las sillas. Para esto se asume que el coeficiente estático de fricción es cero.

R: $\theta = 20,18°$

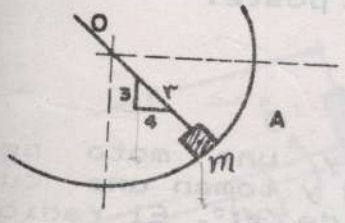
2.18.-



Una persona de 60 Kgs. de masa está patinando sobre una pista circular de 5 metros de radio y adquiere en A una velocidad de 10 m/seg. Determine la fuerza vertical sobre el esquiador en A.

R: $\bar{N} = 1.788$ new $\uparrow$

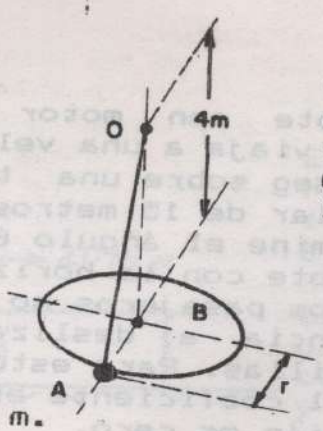
2.19.-



El bloque A de masa m desliza a lo largo de una trayectoria circular de radio 2 metros. El coeficiente de fricción entre A y la trayectoria es 0,40. Si el bloque A en la posición que que se muestra tiene una velocidad de 4 metros/seg, hacia abajo, obtenga el vector aceleración de A en ese instante $en f(\bar{T}, \bar{N})$

R: $\bar{a}_A = (2,29\ \bar{T} + 8\ \bar{N})$ m/seg²

2.20.-



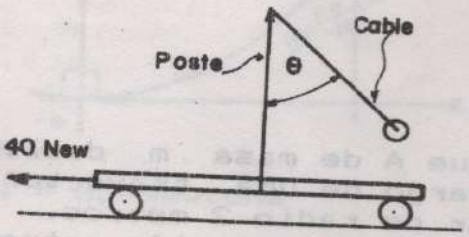
Una partícula de masa m se mueve sobre una trayectoria circular, con una rapidez de 3 m/seg. Determine el radio de la trayectoria.

R: r = 1,92 m.

2.21.- El eje longitudinal de un cohete tiene una alineación tangente a la trayectoria, formando un ángulo de 30° con la vertical. La fuerza axial es 5×10^6 Newtons y el peso del cohete es $(10)^6$ Newtons. Si la rapidez en ese instante es de 1.000 m/seg, calcule la razón en la que el cohete está incrementando su rapidez y el radio de curvatura de la trayectoria.

R: at = 40,51 m/seg² ; ρ = 204.081,63m.

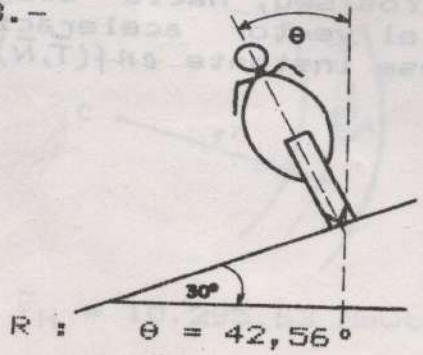
2.22.-



Un péndulo compuesto de esfera de 10 Newtons peso y un cable de 1 m de longitud está montado en un poste colocado encima de un carro de peso 20 Newtons. Si una fuerza horizontal de 40 Newtons impulsa al carro, cuanto vale el ángulo θ que se forma entre el cable del péndulo y el poste.

R: θ = 63,43°.

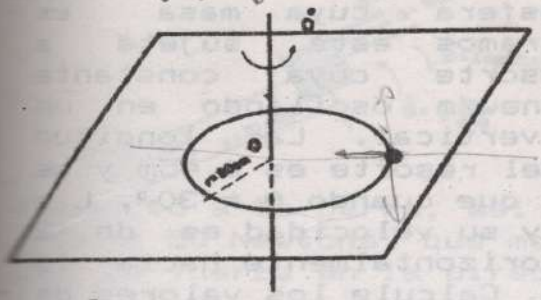
2.23.-



Un hombre y una moto pesan juntos 3 KN y toman una curva en un plano de 30°. El radio de la curva peraltada es 100 metros y la rapidez de 30 m/seg. Calcule el ángulo θ que formará la moto con la vertical.

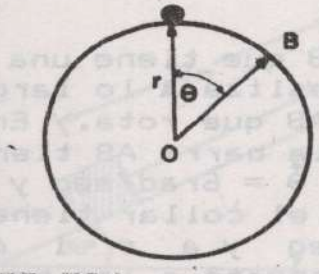
R : θ = 42,56°

2.24.- Una partícula está apoyada sobre una placa horizontal rugosa, ($\mu_{placa/partic.} = 0,50$) a una distancia de 20 cms de un eje vertical alrededor del cual pueda rotar la placa. Encontrar, en revoluciones por mínuto la mayor rapidez que la placa puede tener sin que la partícula se deslice.



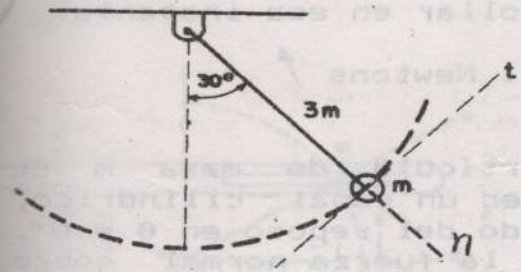
R: $\dot{\theta} = 47,29$ rev/min

2.25.- Un pequeño cuerpo, de masa m, desliza desde el punto mas alto de una esfera de radio r. Encontrar el ángulo θ para el cual se cumple que la fuerza normal sobre el cuerpo es igual a la mitad de su peso.



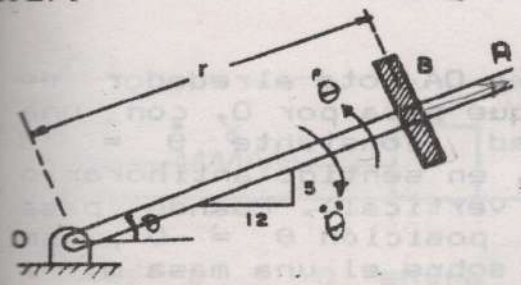
R: $\theta = 33,56°$

2.26.- Un péndulo de 3m de longitud describe un arco de circunsferencia sobre un plano vertical. Si la tensión en la cuerda es $3\sqrt{3}/2$ veces el peso de la esfera, encontrar los vectores velocidad y aceleración en ese instante.



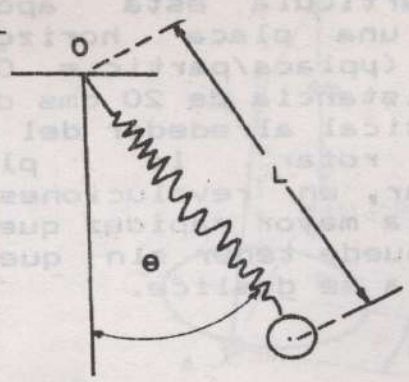
R : $\bar{v} = 7,13$ m/seg. $\angle 30°$ $\quad \bar{a} = 17,65 m/seg^2$ $\angle 46,12$

2.27.- El anillo B de masa 2 Kgs. desliza sobre la barra OA, que gira en el plano vertical. En la posición mostrada $\dot{\theta} = 5$ rad/seg en sentido antihorario y $\ddot{\theta} = 3$ rad/seg² en sentido horario. En ese instante r = 0,3 m y se incrementa a razón de 0,6 m/seg. El coeficiente de fricción entre el anillo B y la barra OA es 0,2. Calcular la reacción de la barra sobre el anillo y la aceleración del anillo respecto a la barra.



R : $\bar{N} = 28,29$ New $\angle$; $\bar{a}_{B/OA} = 0,9$ m/seg² $\angle$ 5/12

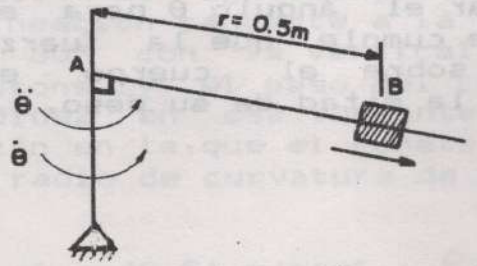
2.28.-



Una esfera cuya masa es 300 gramos está sujeta a un resorte cuya constante K= 200new/m oscilando en un plano vertical. La longitud libre del resorte es 0,45m y se observa que cuando $\theta = 30°$, L = 0,5 m y su velocidad es de 2 m/seg horizontalmente hacia la derecha. Calcule los valores de $\ddot{L}$ y $\ddot{\theta}$.

R: $\ddot{L} = \ddot{R} = -18,83\ m/seg^2$; $\ddot{\theta} = -23,64\ rad/seg^2$

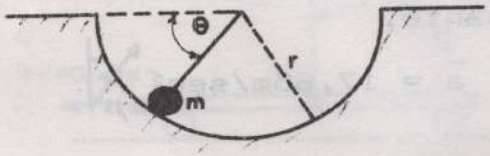
2.29.-



El collar B que tiene una masa de 4 Kgs desliza a lo largo de la barra AB que rota. En ese instante, la barra AB tiene los valores de $\dot{\theta} = 6 rad/seg$ y $\ddot{\theta} = 2\ rad/seg^2$ y el collar tiene una $v = 3m/seg$ y $a = 1\ m/seg^2$ medidas respecto a las barras y dirigidas hacia afuera de O, con r = 0,5m. Determinar la fuerza de fricción radial y la fuerza normal, ambas ejercidas por la barra sobre el collar en ese instante.

R: $f_r = 68$ New ←---- ; $F_n = 153,1$ Newtons ↑

2.30.-



Una partícula de masa m se mueve en un canal cilindrico, partiendo del reposo en $\theta = 0°$. Hallar la fuerza normal sobre la partícula cuando $\theta = 30°$ (utilizando coordenadas polares).

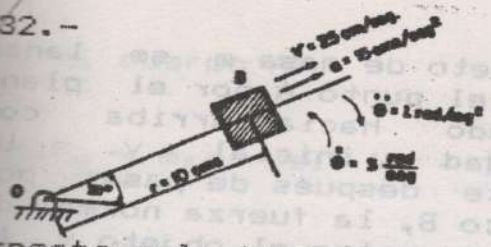
R: $N = (3/2)W$.

2.31.-

La barra OA rota alrededor de un eje que pasa por O, con una velocidad constante $\dot{\theta} = 3$ rad/seg, en sentido antihorario (plano vertical). Cuando pasa por la posición $\theta = 0°$, se coloca sobre el una masa m, a una distancia de r = 0,45 m. Si la masa comienza a deslizar cuando $\theta = 45°$ determine el coeficiente de fricción entre la masa y la barra OA.

R: $\mu = 0,42$.

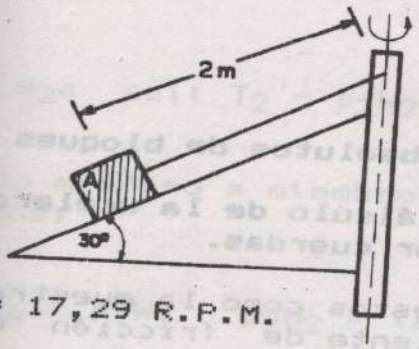
2.32.-



El movimiento del bloque B sobre una mesa horizontal lisa, está controlado por la barra que rota alrededor de un eje vertical en O. En la posición mostrada B tiene los valores de velocidad $\dot{r}$ y aceleración $\ddot{r}$ respecto a la barra, así como los de $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$. Si el bloque B pesa 50 Newtons, qué momento ejerce alrededor del punto O y la fuerza en la dirección radial.

R: $\bar{M}_O = 0,714$ New x m ; Fr = -3,83 New.

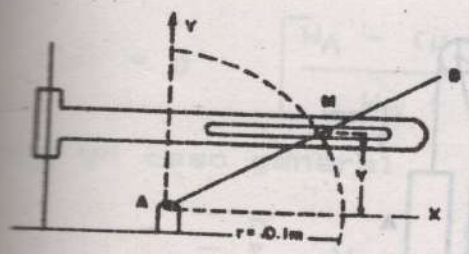
2.33.-



Un cuerpo de peso W descansa sobre el plano inclinado del marco de la figura. Una cuerda unida al marco hace que el cuerpo rote con ella alrededor del eje vertical. Obtenga $\dot{\theta}$ en R. P. M. para la cual la tensión en la cuerda es igual al peso del cuerpo.

R: $\dot{\theta}$ = 17,29 R.P.M.

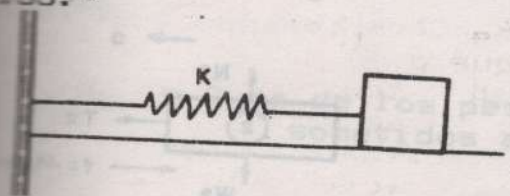
2.34.-



La barra horizontal ranurada pesa 100 Newtons y se desliza con fricción despreciable a lo largo de la guía vertical. Calcule las aceleraciones en los ejes x, y, y la fuerza ejercida en ella por el pasador M cuando y = 0,05 m, si la barra AB está rotando con $\dot{\theta}$ = 20 rad/seg constante.

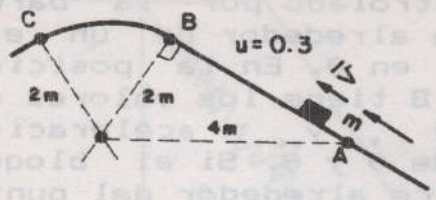
R: $\bar{F}$ = 104,08 New ↓

2.35.-



Un cuerpo cuya masa es de 20 Kgs descansa sobre una tabla que gira alrededor de un eje vertical con velocidad angular de 60 r.p.m. La constante del resorte es 40×10^3 New/m. y su fuerza es $\mu = 0$ entre cuerpo y tabla. Calcule el alargamiento del resorte. La longitud indeformada del resorte es de 0,60 m.

R: x = 12,08 mm.

2.36.- 

Un objeto de masa m se lanza desde el punto A por el plano inclinado hacia arriba con velocidad inicial v. Un instante después de pasar por el punto B, la fuerza normal de contacto entre el objeto y la superficie soportante se reduce a la mitad del valor que tenía un instante antes de pasar por B. El coeficiente de fricción entre el objeto y el plano inclinado es 0,30. Determine el valor de v.

R: v = 7,75 m/seg.

2.4.- Movimientos dependientes a bsolutos de bloques con poleas. Expresión general para el cálculo de la aceleración de varios cuerpos unidos por cuerdas.

a) Sean los cuerpos dispuestos como la muestra la Figura 2.5. en donde el coeficiente de fricción entre ellos y el plano es diferente o puede ser igual.

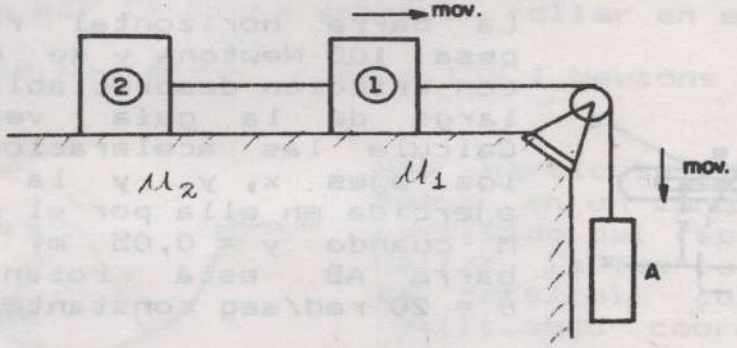
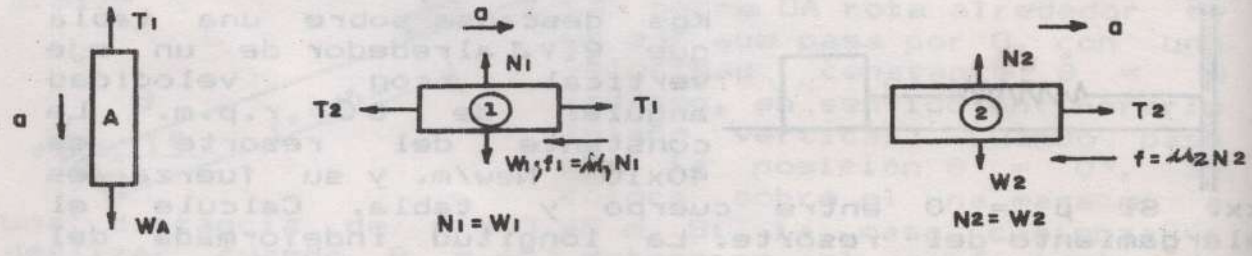


Fig. 2.5
Diagramas de cuerpo libre de A y de los cuerpos 1 y 2.



Aplicando la Segunda Ley de Newton a los cuerpos A; 1 y 2 se tiene:

Para el cuerpo A:

$$+\downarrow \Sigma F_y = m_A a \quad \text{así:} \quad W_A - T_1 = (W_A/g)a \qquad (2\text{-}10)$$

Para el cuerpo 1:

$$\overrightarrow{\Sigma F_x} = m_1 a \quad \text{así:} \quad T_1 - T_2 - \mu_1 W_1 = (W_1/g)a \qquad (2\text{-}11)$$

Para el cuerpo 2:

$$\rightarrow \Sigma F_x = m_2 a \quad \text{así:} \quad T_2 - \mu_2 W_2 = (W_2/g)a \qquad (2\text{-}12)$$

Sumando miembro a miembro las Ecs. (2-10), (2-11) y (2-12) se tiene:

$$W_A - \mu_1 W_1 - \mu_2 W_2 = (a/g)(W_A + W_1 + W_2) \qquad (2\text{-}13)$$

de donde:

$$a = g \left[\frac{W_A - (\mu_1 W_1 + \mu_2 W_2)}{W_A + W_1 + W_2} \right] \qquad (2\text{-}13')$$

para un caso general

$$a = g \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} W_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_{ki} W_{ki}}{\Sigma W_T} \right] \qquad (2\text{-}14)$$

siendo,

$\sum_{i=1}^{n} W_i$ = Suma de los pesos colgantes (eje vertical no sometidos a fricción).

$\sum_{i=1}^{n} \mu_{ki} W_{ki}$ = Suma de los productos $\mu_k W_k$

En el supuesto caso de ser μ_k el mismo para los cuerpos que deslizan por el plano horizontal, entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_{ki} W_{ki} = \mu_k \sum_{i=1}^{n} W_{ki}$$

ΣW_T = suma de los W_i y W_{ki} o sea la suma de todos los cuerpos en movimiento.

μ_k = coeficiente de fricción cinética.

b) Supongamos ahora, que los cuerpos estan dispuestos como la muestra la Fig. 2.6. en el plano inclinado y los coeficientes de fricción entre todas las superficies es igual.
Despréciese el peso de las cuerdas y polea y la fricción entre ellos.

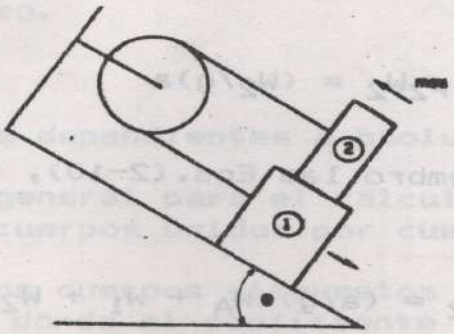
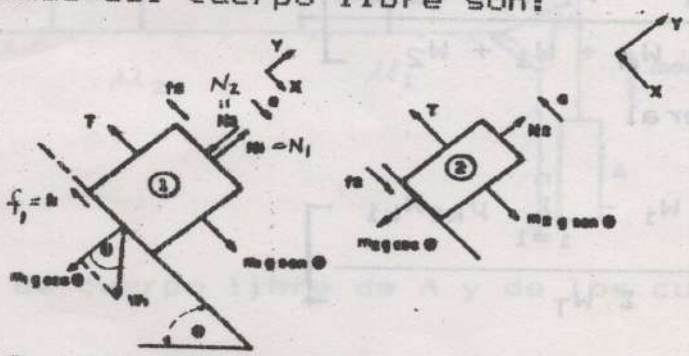


Fig. 2.6.

Los diagramas del cuerpo libre son:



aplicando la Segunda Ley de Newton a los cuerpos 1 y 2 se tiene:

Para el cuerpo 2.

$$+\nearrow \Sigma F_y = 0 \; ; \qquad N_2 = m_2 g \cos\theta \qquad (2\text{-}15)$$

$$+\nwarrow \Sigma F_x = m_2 a \qquad T - m_2 g \text{ sen } \theta - f_2 = m_2 a \qquad (2\text{-}16)$$

$$T = m_2 g \text{ (sen } \theta + \mu_k \cos \theta + m_2 a. \qquad (2\text{-}16')$$

Para el cuerpo 1.

$$+\nearrow \Sigma F_y = 0 \quad ; \quad N_1 = N_2 + m_1 g \cos\theta = g \cos\theta \, (m_1 + m_2) \qquad (2\text{-}17)$$

$$\text{pero} \qquad f_1 = \mu_k N_1 = \mu_k \, g \cos\theta \, (m_1 + m_2) \qquad (2\text{-}18)$$

$$+\searrow \Sigma F_x = m_1 a \; ; \; m_1 g \operatorname{sen}\theta - f_1 - f_2 - T = m_1 a \qquad (2\text{-}19)$$

$$T = m_1 g \operatorname{sen}\theta - \mu_k g \cos\theta (m_1 + m_2) - \mu_k . m_2 g \cos\theta - m_1 a \qquad (2\text{-}19')$$

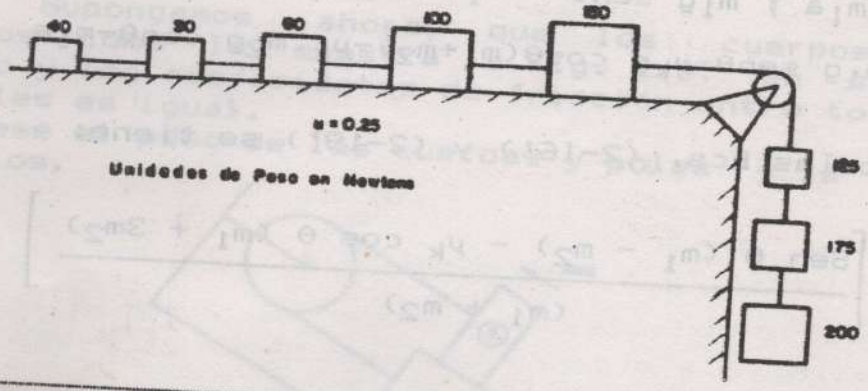
Igualando las Ecs. (2-16') y (2-19') se tiene:

$$a = g \left[\frac{\operatorname{Sen}\theta \, (m_1 - m_2) - \mu_k \cos\theta \, (m_1 + 3m_2)}{(m_1 + m_2)} \right] \qquad (2\text{-}20)$$

Nota: La fricción es la resistencia al movimiento entre dos superficies en contacto.
Se tiene: Fricción por deslizamiento y por rodamiento.
La fricción que impide el movimiento se llama Estática y el que retarda y trata de impedir el movimiento entre dos cuerpos en contacto se llama DINAMICO.
En el instante en que comienza el movimiento la fuerza F es igual a la de fricción entonces $F = f = (\mu_{est})N$.
La fricción de rodadura generalmente es menor que la de deslizamiento y aun así no es despreciable.

Ejemplo 2.8.

Calcule la aceleración de los cuerpos mostrados. el coeficiente de fricción entre el plano horizontal y los bloques es $\mu = 0,25$



Solución:

Aplicando la Ec.(2-14) para coeficientes de fricción iguales se tiene:

$\Sigma W_i = (125 + 175 + 200) = 500$ New.

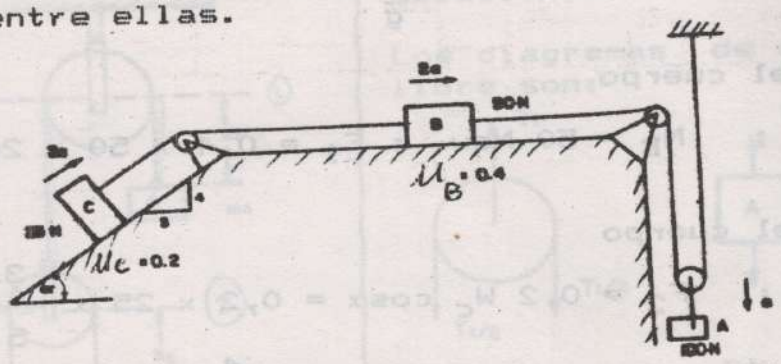
$\Sigma \mu_{ki} W_{ki} = 0,25(40+50+60+100+150) = 0,25(400) = 100$ New

$\Sigma W_T = \Sigma W_i + \Sigma W_{ki} = 500 + 400 = 900$ New. entonces

$$a = g\left[\frac{\Sigma W_i - \mu_k \Sigma W_{ki}}{\Sigma W_T}\right] = 9,8\left(\frac{500 - 100}{900}\right) = 4,36 \text{ m/seg}^2$$

Ejemplo 2.9.-

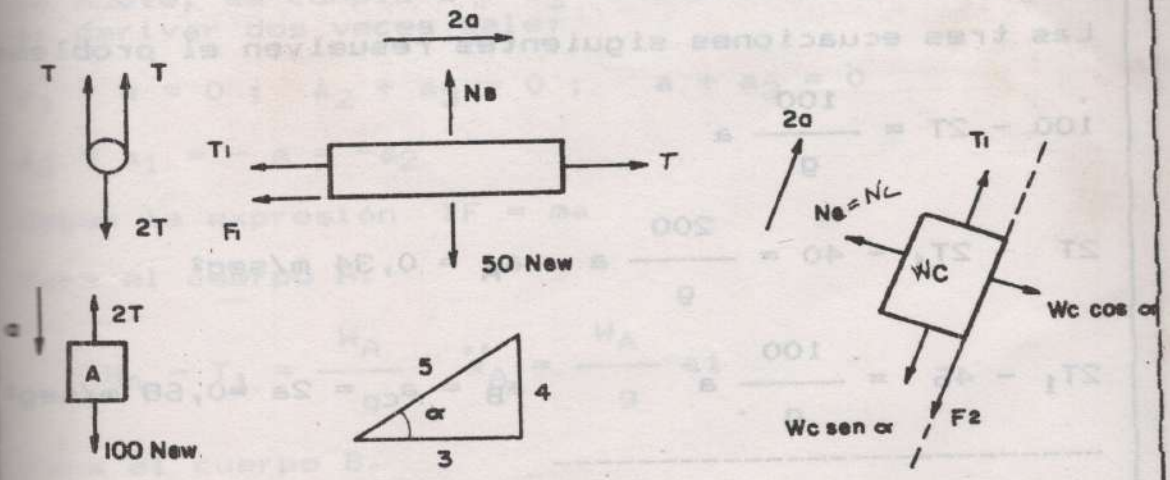
Determine la aceleración de los bloques A, B y C. El coeficiente de fricción entre B y el plano horizontal es 0,4 y entre C y el plano inclinado es 0,2. Dseprecie el peso de las cuerdas y poleas, así como el roce entre ellas.



Solución:

Mientras A se desplaza s, B y C se desplazan 2s mts de ahí que si la aceleración de A es a, la de B y C será 2a.

Los diagramas del cuerpo libre son:



Continuación Ejemplo 2.9.

Para el cuerpo

$$A \quad ; \quad 100 - 2T = \frac{100}{g} a$$

Para el cuerpo

$$B \quad ; \quad N_B = 50 \text{ New.} \; ; \; F_1 = 0,4 \times 50 = 20 \text{ New}$$

Para el cuerpo

$$C \quad ; \quad F_2 = 0,2 \, W_c \cos\alpha = 0,2 \times 25 \times \frac{3}{5} = 3 \text{ New}$$

$$W_c \operatorname{sen}\alpha = 25 \times \frac{4}{5} \quad 20 \text{ New}$$

$$T_1 - W_c \operatorname{sen}\alpha - F_2 = \frac{W_c}{g} . (2a)$$

$$T_1 - 23 = \frac{50}{g} a$$

Las tres ecuaciones siguientes resuelven el problema

$$100 - 2T = \frac{100}{g} a$$

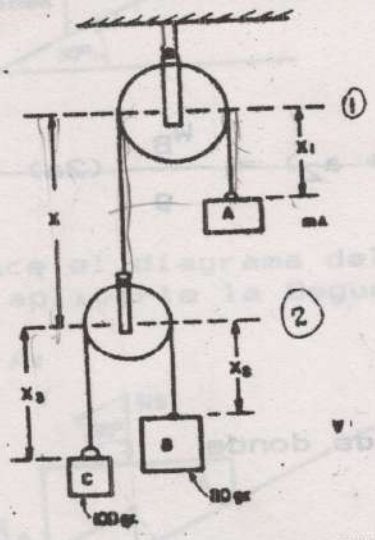
$$2T - 2T_1 - 40 = \frac{200}{g} a \qquad a_A = 0,34 \text{ m/seg}^2$$

$$2T_1 - 46 = \frac{100}{g} a \qquad a_B = a_C = 2a = 0,68 \text{ m/seg}^2$$

$$100 - 86 = \frac{400}{g} a$$

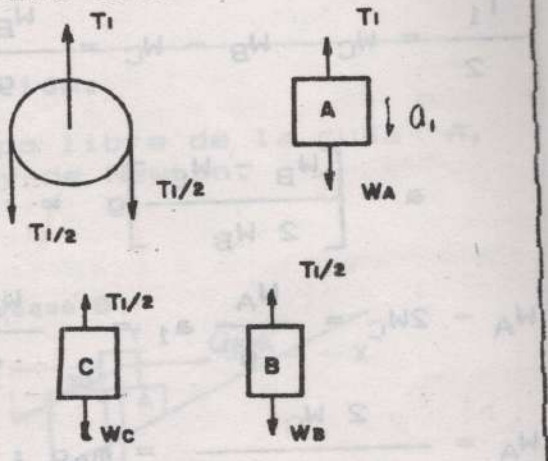
Ejemplo 2.10.

En el sistema mostrado, cuál debe ser el valor de m_A de manera que la masa de 100 gramos no se mueva. Si m_A tiene dicho valor cuál es su aceleración. Desprecie el peso de las poleas y el roce.



Solución:

Los diagramas de cuerpo libre son:



Se cumplen las siguientes relaciones:

$x_1 + x$ = constante ; $x_2 + x_3$ = constante y si C no se mueve, se cumple $x + x_3$ = constante; por lo tanto al derivar dos veces sale:

$a_1 + a = 0$; $a_2 + a_3 = 0$; $a + a_3 = 0$

$a_3 = a_1 = -a = -a_2$

Según la expresión $\Sigma F = ma$

Para el cuerpo A.

$$W_A - T_1 = \frac{W_A}{g} \ddot{x}_A = \frac{W_A}{g} a1$$

Para el cuerpo B.

$$W_B - \frac{T_1}{2} = \frac{W_B}{g} \ddot{x}_B = \frac{W_B}{g} (a + a_2)$$

Continuación Ejemplo 2.10.

Para el cuerpo C.

$$W_C - \frac{T_1}{2} = \frac{W_C}{g}\ddot{x}_C = \frac{W_C}{g}(a + a_3)$$

Resolviendo

$$\frac{T_1}{2} = W_C; \quad W_B - W_C = \frac{W_B}{g}(a + a_2) = \frac{W_B}{g}(2a)$$

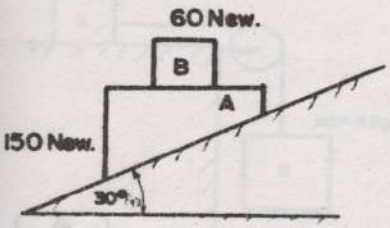
$$a = \left[\frac{W_B - W_C}{2\,W_B}\right]g = g/4$$

$$W_A - 2W_C = \frac{W_A}{g}a_1 = -\frac{W_A}{g}a \quad \text{de donde}$$

$$W_A = \frac{2\,W_C}{(1 + a/g)} = m_A g \;;$$

$$m_A = \frac{2\,m_C g}{g\,(1 + a/g)} = \frac{2\,m_C}{(1 + 1/4)} = \frac{2 \times 100}{(1 + 1/4)} = 160 \text{ gr}$$

Ejemplo 2.11.

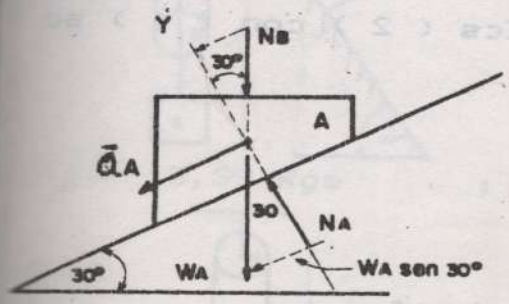


Un bloque B de 60 Newtons descansa sobre la superficie superior de una cuña A de 150 Newtons. desp reciando la fricción, determine la aceleración de A y B y la aceleración de B respecto de A, inmediatamente después de que el sistema se suelta desde el reposo.

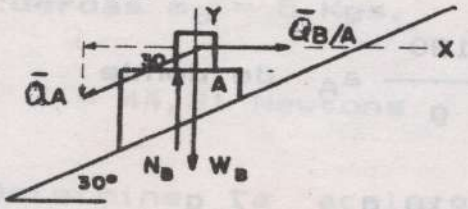
Solución:

Se hace el diagrama del cuerpo libre de la cuña A, para aplicarle la Segunda Ley de Newton.

Cuña A:



Bloque B



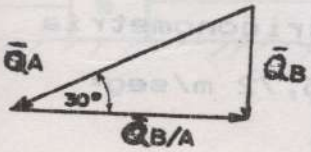
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$N_A - W \cos 30° - N_B \operatorname{sen} 30° = 0 \qquad (1)$$

$$+\swarrow \Sigma F_x = ma_A$$

$$W_A \operatorname{sen} 30° + N_B \operatorname{sen} 30° = m_A a_A$$

$$150 + N_B = \frac{150}{g}\, a_A \qquad (2)$$



$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{B/A} \qquad (3)$$

Continuación Ejemplo 2.11.

$+\uparrow \Sigma F_y = m_B a_y$

$W_B - N_B = m_B a_A \text{ sen } 30°$

$60 - N_B = 30/g \; a_A \qquad (4)$

$\pm\rightarrow \Sigma F_x = m_B a_x$

$0 = m_B \, a_{B/A} - m_B \, a_A \cos 30°$

$a_{B/A} = a_A \cos 30° = a_A \dfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad (5)$

Sumando miembro a miembro las Ecs (2) con (4) se tiene:

$210 = \dfrac{180}{g} a_A$ de donde

$a_A = \dfrac{210\ g}{180} = \dfrac{7\ g}{6} = 11{,}43 \text{ m/seg}^2$

$\bar{a}_A = 11{,}43 \text{ m/seg}^2$ $\measuredangle 30°$

Reemplazando en la Ec. (5) entonces.

$a_{B/A} = 11{,}43 \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 9,89 m/seg²

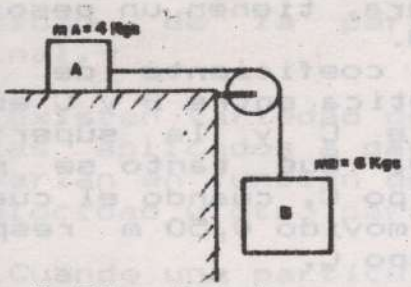
$\bar{a}_{B/A} = 9{,}89 \text{ m/seg}^2 \longrightarrow$

En el triángulo de vectores por trigonometría

$a_B = a_A \text{ sen } 30° = 11{,}43 \; (1/2) = 5{,}72 \text{ m/seg}^2$

$\bar{a}_B = 5{,}72 \text{ m/seg}^2 \downarrow$

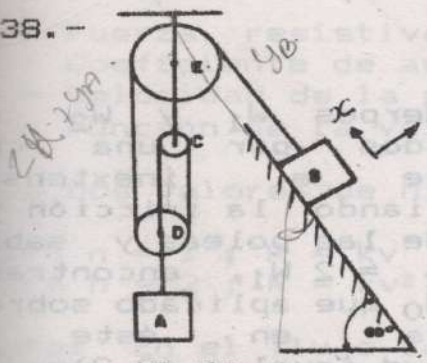
2.37.



Despreciando los efectos de roce, masa de la polea y la cuerda, determine la aceleración a la cual descenderá el bloque B Cuál es la tensión en la cuerda?

R: a = 5,88 m/seg² ; T = 23,52 New.

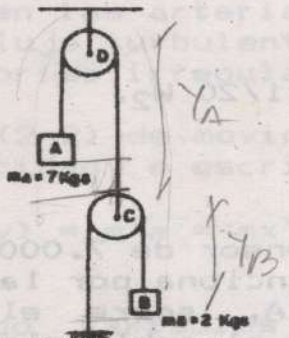
2.38.-



Obtenga la masa requerida del bloque A y la tensión en B de modo que cuando se suelte desde el reposo mueva al bloque B, una distancia s_B = 0,75 m hacia arriba del plano inclinado liso en t = 2 seg. Desprecie la masa de las poleas y las cuerdas m_B = 5 Kgs.

R: m_A = 13,39 Kgs ; T = 44,31 Newtons

2.39.-

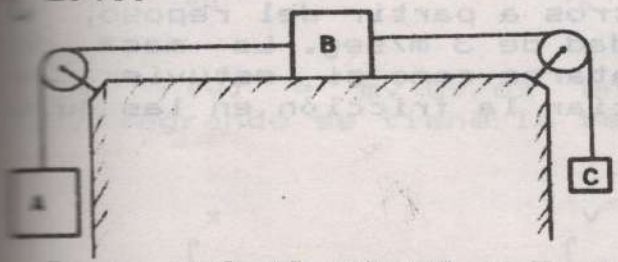


Determine la aceleración de cada bloque y la tensión desarrollada en las dos cuerdas. Desprecie la masa de las poleas y las cuerdas.

R: a_A = 1,96 m/seg² ; a_B = 3,92 m/seg²

T_A = 54,88 New ; T_B = 27,44 New

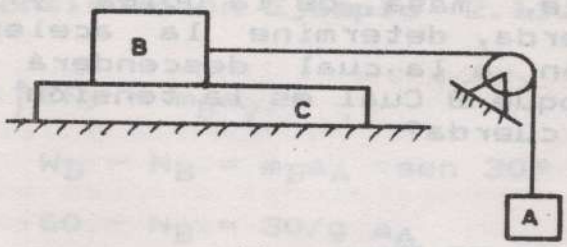
2.40.-



Las masas de los bloques A, B y C de la figura son 15,25 y 10 Kgs respectivamente y se encuentran en reposo inicialmente. μ entre B y la superficie horizontal es 0,10. Calcule la tensión en cada cuerda y la aceleración del cuerpo B.

R: a_B = 0,49 m/seg² ; T_A = 139,65 New ; T_B = 102,90 New.

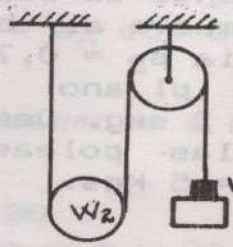
2.41.-



Los cuerpos A, B y C de la figura, tienen un peso cada uno de W.
El coeficiente de fricción cinética entre B y C es 0,30 y entre C y la superficie es 0,10. Qué tanto se mueve el cuerpo C, cuando el cuerpo B se ha movido 0,50 m respecto al cuerpo C.

R: $a_{B/C} = 2,45\ m/seg^2$ ----→ $x_C = 0,20\ m$.

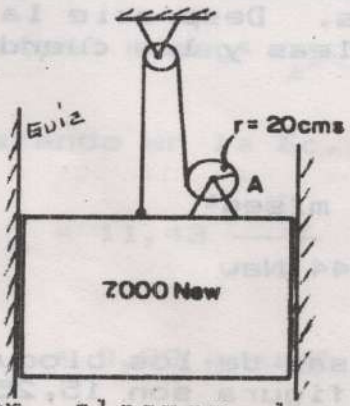
2.42



Los cuerpos W_1 y W_2 están sostenidos por una cuerda flexible e inextensible. Despreciando la fricción y la masa de las poleas y sabiendo que $W_2 = 2\ W_1$, encontrar el peso W_O que aplicado sobre W_2 produzca en éste una aceleración hacia abajo de magnitud igual a (0,2)g y la tensión en la cuerda.

R: $W_O = 3/8\ W_1 = 3/16\ W_2$; $T = 11/20\ W_2$.

2.43.-



Un ascensor de 7.000 Newtons de peso funciona por la acción del torno A, sobre el cual se arrolla el cable elevador. Determinar el momento constante M que el motor montado en el ascensor debe proporcionar al árbol del torno de forma que en un ascensor vertical de 3 metros a partir del reposo, el ascensor alcance la velocidad de 3 m/seg. La masa del torno es pequeña y debe tratarse como si estuviera en equilibrio rotatario. Despreciar la fricción en las guías verticales.

R: M = 807,14 New x m.

2.5.- Movimiento en un medio resistente que depende de la velocidad de la partícula. - Velocidad límite o terminal.-

Existen variedad de problemas donde los sistemas de fuerzas aplicados a partículas no son constantes, sino que varían en función del tiempo, del desplazamiento, de la velocidad u otro parámetro.

Cuando una partícula se introduce en un medio (gas o líquido) éste ofrece una resistencia a su penetración que es función de la velocidad o sea qué $R = k\, v^n$ donde

R = Fuerza. resistiva.
K = Coeficiente de arrastre o de amortiguamiento.
v = Velocidad de la partícula con relación al medio.
n + Función de la velocidad en el medio.

Los dos valores de n más aplicables son:

Para n = 1 ; R = kv el flujo es laminar.
Para n = 2 ; R = kv² el flujo es turbulento.

Nota: En el flujo laminar las partículas se mueven a lo largo de trayectorias lisas, en capas o láminas Ej. La sangre en las arterias.
En el flujo turbulento las partículas se mueven siguiendo trayectorias irregulares.

La Ec. (2-2) de movimiento cuando la fuerza es función de la velocidad e escribe:

$$F(v) = m\,a = mx = m\,\frac{dv}{dt}$$

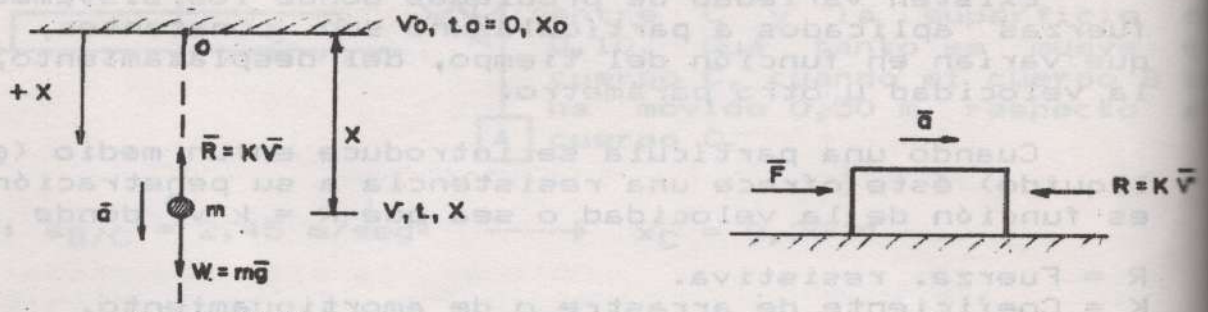
separando variables e integrando se obtiene la relación v - t.

$$\int_{t_o}^{t} dt = t - t_o = m \int_{v_o}^{v} dv \,/\, F(v) \qquad (2\text{-}21)$$

Si $F(v) = mv\, dv/dx$ entonces, separando variables e integrando se tiene la relación v - x así:

$$\int_{x_o}^{x} dx = x - x_o = m \int_{v_o}^{v} v\,dv \,/\, F(v) \qquad (2\text{-}22)$$

Sea un cuerpo de masa m que cae o se mueve desde el reposo y con velocidad inicial v_O, en un medio (aire) cuya resistencia es proporcional a la velocidad Fig. 2.7a y b.



Fig, 2.7

La ecuación de movimiento + $\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$ se escribe,

$$W - kv = ma = m\frac{dv}{dt} = m a_t \qquad (2\text{-}23)$$

separando variables,

$$\int_{t_O=0}^{t} dt = \int_{v_O}^{v} m\,dv \,/\, (W - kv) \quad \text{e integrando}$$

$$t = -\frac{m}{k} L\,[\,(W - kv)\,]_{v_O}^{v} \quad \text{entonces,}$$

$$t = \frac{m}{k}\left[L\left(\frac{W - k\,v_O}{W - kv}\right)\right] \qquad (2\text{-}24)$$

De la Ec. (2-24) se obtiene:

$$e^{(kt/m)} = \frac{W - k.v_O}{W - kv} \quad \text{entonces} \quad v = \frac{W}{k} - \left(\frac{W}{k} - v_O\right)e^{-kt/m}$$

(2-25)

La Ec. (2-25)nos permite llegar a la conclusión de que cuando $t \longrightarrow \infty$ la velocidad adquiere un valor máximo llamado límite o terminal que es:

$$v_L = W/k = mg/k \qquad (2\text{-}26)$$

La Ec. (2-26) se puede obtener también haciendo a = 0 en la Ec. (2-23) con lo que $W - K v_L = 0 \dashrightarrow v_L = W/k$

Para obtener a v = f(x), se sabe que v= dx/dt, reemplazando en la Ec. (2-25) y separando variables e integrando se tiene:

$$\int_0^x dx = \int_0^t [\, W/k - (W/k - v_0)\, e^{-kt/m} \,]\, dt$$

$$x = [W/k.t - (W/k - v_0)\, e^{-kt/m}\, (1 / - k/m)\,]$$

$$x = (W/k)t + m/k\, [(W/k - v_0)\, e^{-kt/m} - (W/k - v_0)] =$$

$$x = (W/k)t + m/k\, (W/k - V_0)\, [e^{-kt/m} - 1\,] \qquad (2\text{-}27)$$

Si $v_0 = 0$ y se utiliza la Ec. (2-26), las Ecs. (2-24) , (2-25) y (2-27) se escriben;

$$t = v_L/g\, .\, L[\, v_L /(v_L - v)] \qquad (2\text{-}24')$$

$$v = v_L\, (1 - e^{-gt/v_L}) \qquad (2\text{-}25')$$

$$x = v_L t + v^2_L/g\ \ (e^{-gt/v_L} - 1) \qquad (2\text{-}27')$$

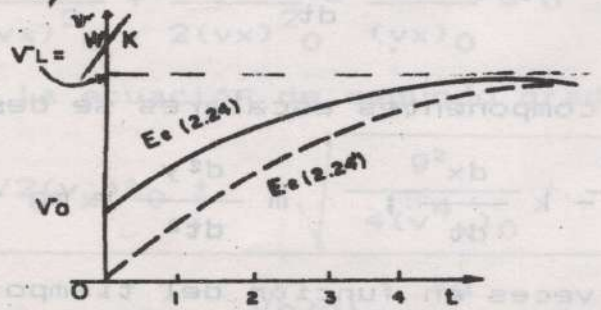


Fig 2.8

2.5.1.- Proyectiles. Consideración de la resistencia del aire proporcional a la velocidad.

Se dispara un proyectil desde el origen, con una velocidad v_0, que debe batir un blanco en X = R, Y = 0.

a) Calcule la corrección de primer orden del alcance debido a una resistencia del aire proporcional a la velocidad.

b) Deduzca una expresión para la corrección de primer orden para el ángulo de disparo debido a la resistencia del aire.

De su solución en función del ángulo Ø de disparo con resistencia del aire y llame k la constante de proporcionalidad.

Solución:

Se considerará un sistema de coordenadas o.x.y.z, tal que el eje oy sea vertical y que el plano xy contenga a la velocidad inicial (v_O) que forma un ángulo Ø con el eje de las x, Fig. 2.9.

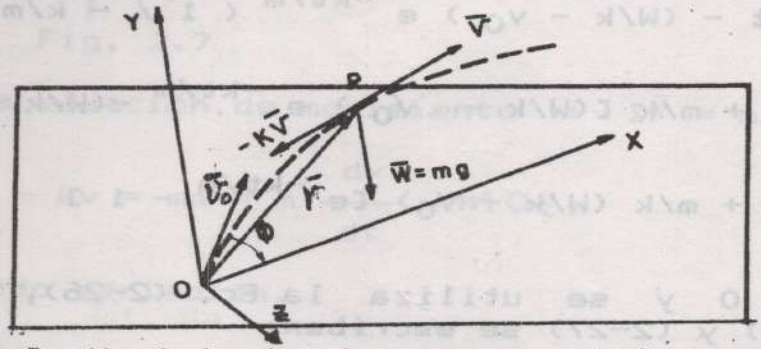


Fig. 2.9. Movimiento de un proyectil con resistencia del aire.

a) La ecuación de movimiento vectorial a resolver sería:

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -mg\,\bar{j} - k\frac{d\bar{r}}{dt}$$

en notación de componentes escalares se desdoble en:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt}\;;\qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - k\frac{dy}{dt}$$

Integrando dos veces en función del tiempo se tiene:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (v_x)_O e^{-kt/m};\quad v_y = \frac{dy}{dt} = \left[\frac{mg}{dt} + (v_y)_O\right]e^{-kt/m} - \frac{mg}{k}$$

$$x = \frac{m(v_x)_O}{k}\left[1 - e^{-kt/m};\right]\quad y = \frac{m^2g}{k^2} + \frac{m(v_y)_O}{k}\,1 - e^{kt/m} - \frac{mgt}{k}$$

Despejando t en la ecuación para x y reemplazando en y se obtiene la ecuación de la trayectoria.

$$y = \frac{mg}{k(v_x)_0} + \frac{(v_y)_0}{(v_x)_0}\,x + \frac{m^2 g}{k^2}\,L\left[1 - \frac{kx}{m\,(v_x)_0}\right] \qquad (2\text{-}28)$$

Serie de Maclaurin de $L\,(1+\lambda)$

pero $L\,(1+\lambda) = \lambda - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3} - \frac{\lambda^4}{4} + \ldots\ldots \quad |\lambda| < 1$

Reemplazando en la Ec. (2-28)

$$y = \frac{mg}{k(v_x)_0} + \frac{(v_y)_0}{(v_x)_0}\,x + \frac{m^2 g}{k^2}\left[-\frac{kx}{m(v_x)_0} - \frac{k^2x^2}{2m^2(v_x)^2_0} + \left(\frac{-kx}{m(v_x)_0}\right)\right]$$

Simplificando,

$$y = \left[\frac{(v_y)_0}{(v_x)_0}\,x - \frac{gx^2}{2(v_x)^2_0}\right] - \frac{1}{3}\,x\,\frac{kg\,x^3}{m(v_x)^3_0}\ldots\ldots \qquad (2\text{-}28')$$

Observe además que los dos primeros términos coinciden con el caso ideal (Resistencia del aire, nula), Ec. (1-10).

Para averiguar el alcance máximo se hace $y = 0$; resultando;

$$\frac{1}{3}\,\frac{kgx^2}{m(vx)^3_0} + \frac{gx}{2(vx)^2_0} - \frac{(vy)_0}{(vx)_0} = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, queda

$$x = \frac{g/2(v_x)^2_0 \pm \sqrt{\frac{g^2}{4(v^4{}_x)_0} + \frac{4kg\,(v_y)_0}{3m(v^4{}_x)_0}}}{(2/3)\frac{kg}{m(v^3{}_x)_0}} =$$

$$x = \frac{3m\,(v_x)_0}{4k}\left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{16k(v_y)_0}{3mg}}\right]$$

Es evidente la escogencia del signo positivo; pero por el binomio de Newton, se sabe que:

$$(1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{n(n-1)}{2!}\lambda^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda^3 + \ldots$$

Aplicando éste desarrollo al radical de la ecuación anterior, con n = 1/2 se tiene:

$$X=R=\frac{3m(v_x)_0}{4k}\left[-1+1+\tfrac{1}{2}\left(\frac{16k(v_y)_0}{3\,mg}\right)+\frac{(-\frac{1}{2})}{2!}\left(\frac{16k(v_y)_0}{3\,mg}\right)^2+\ldots\right]$$

$$R = \frac{2(v_x)_0\,(v_y)_0}{g} - \frac{8}{3}\,\frac{k(v_x)_0\,(v_y)_0}{mg^2}$$ observe que el

primer término es el alcance ideal; Ec. (1-11)

$$\frac{8}{3}\,\frac{k(v_x)_0\,(v^2{}_y)_0}{mg} \qquad (2\text{-}29)$$

es la corrección de primer orden.

Factorizando;

$$R = \frac{2(v_x)_0\,(v_y)_0}{g}\left[1 - \frac{4k(v_y)_0}{3\,mg}\right] \qquad (2\text{-}30)$$

el término $\frac{4k\,(v_y)_0}{3\,mg}$ indica la cantidad en que se reduce

el alcance del proyectil respecto a la distancia al blanco.

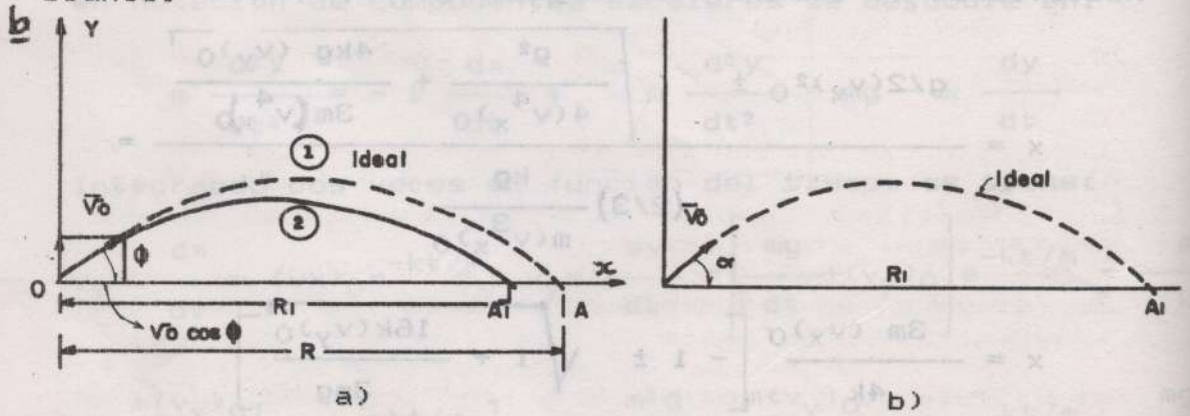


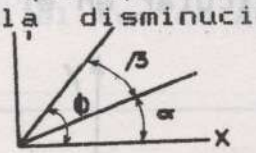
Fig. 2.10 Alcance con y sin resistencia del aire.

En la trayectoria (2) de la Fig. 2.10a se considera la resistencia del aire,

$$R_1 = \frac{2(v_x)_0\,(v_y)_0}{g} - \frac{8}{3}\,\frac{k\,(v_x)_0\,(v^2y)_0}{mg^2} \quad \text{entonces}$$

$$R_1 = \frac{(v_0)^2\ \text{sen}\ 2\phi}{g}\left[1 - \frac{4k\ v_0\ \text{sen}\ \phi}{3mg}\right], \quad \text{si se desea dar en } A_1$$

Sin resistencia del aire, tocaría colocar el cañón formando un ángulo α, Fig. 2.10 b, menor que ϕ, en el ángulo β. Entonces $\phi = \alpha + \beta$, donde β es la disminución angular debida a la resistencia del aire.



$$R_1 = \frac{(v^2)_0\ \text{sen}\ 2\alpha}{g} = \frac{(v^2)_0}{g}\ \text{sen}\ 2\,(\phi-\beta) \quad \text{igual a la Ec. (1-11)}$$

Como se desea obtener el mismo alcance, se igualan las dos ecuaciones de R_1 obteniendose:

$$\frac{(v^2)_0}{g}\ \text{sen}\ (2\phi - 2\beta) = \frac{(v^2)_0}{g}\ \text{sen}\ 2\phi\left[1 - \frac{4kv_0\ \text{sen}\phi}{3\ mg}\right]$$

Simplificando y desarrollando se tiene:

$$\text{sen}\ 2\phi\ \cos 2\beta - \cos 2\phi\ \text{sen}\ 2\beta = \text{sen}\ 2\phi\left[1 - \frac{4kv_0\ \text{sen}\ \phi}{3\ mg}\right]$$

factor común sen 2ϕ, entonces

$$\text{sen}\ 2\phi\left[1 - \frac{4\ kv_0\ \text{sen}\phi}{3\ mg} - \cos 2\beta\right] = -\cos 2\phi\ \text{sen}2\beta$$

Como la corrección es de primer orden y β es pequeñisimo, entonces cos 2$\beta \approx 1$; sen 2$\beta \approx 2\beta$ así:

$$-\frac{\text{sen}\ 2\phi}{\cos\ 2\phi}\left(\frac{4\ kv_0\ \text{sen}\ \phi}{3\ mg}\right) = -\ 2\beta \quad \text{de donde}$$

$$\beta = \frac{4\ kv_0\ \text{sen}\ \phi}{2\ x\ 3\ mg}\left(\frac{2\ \text{sen}\phi\ \cos\phi}{\cos^2\phi - \text{sen}^2\phi}\right) = \frac{4\ kv_0}{3\ mg}\left(\frac{\text{sen}^2\phi\ \cos\phi}{\cos^2\phi - \text{sen}^2\phi}\right)$$

$$\beta = \frac{4\, kv_0 \cos\varnothing}{3\, mg \left(\frac{\cos^2\varnothing - \operatorname{sen}^2\varnothing}{\operatorname{sen}^2\varnothing} \right)}$$ finalmente

$$\beta = \frac{4\, kv_0 \cos\varnothing}{3\, mg\, (\operatorname{cotg}^2\varnothing - 1)}$$

En la Fig. 2.11 se pone de manifiesto la influencia que tiene la resistencia del aire en la trayectoria y en partículas en el alcance del proyectil.

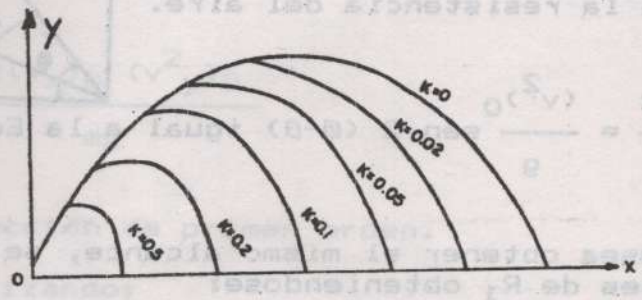
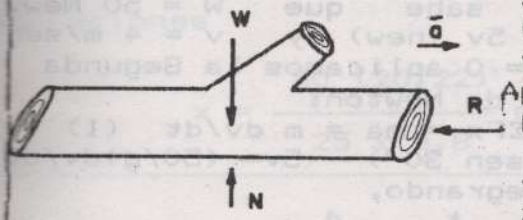


fig. 2.11

Ejemplo 2.12.
A un tronco de 50 Kgs de masa se le comunica una velocidad inicial hacia adelante de 0,3 m/seg en aguas tranquilas. Si la resistencia del agua, es proporcional a la rapidez del tronco en cualquier instante y vale R = 10 v (new); determinar el tiempo necesario para que la rapidez del tronco se convierta en 0,1 m/seg. Dada una velocidad inicial de 0,30 m/seg. Qué distancia viajará el tronco antes de pararse.



Solución:
Se sabe que m = 50 Kgs. R = 10v ; v_1 = 0,3 m/seg; v_2 = 0,1 m/seg.
Aplicamos la Segunda Ley de Newton en el eje x, así:

$+ \Sigma Fx = ma; \quad -10v = 50\, dv/dt \quad (1)$ integrando

$$-1/5 \int_0^t dt = \int_{0,3}^{v} dv/v \; ; \; 1/5t = -L(v/0,3) = L(0,3/v)$$

para v = 0,1 m/seg.

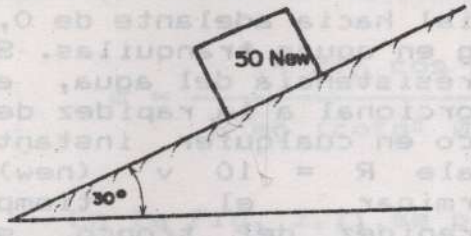
$$t = 5\, L\,(0,3/0,1) = 5\, L\, 3 = 5,49 \text{ seg}$$

$$t = 5,49 \text{ seg}$$

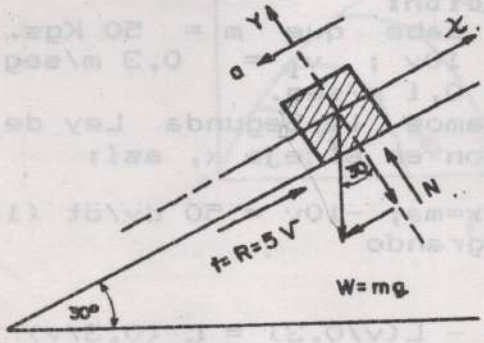
Para encontrar la distancia que viaja el tronco, se expresa en la Ec. (1) del movimiento, a= vdv/dx, así
$-10v = 50\, vdv/dx$ integrando nuevamente

$$-1/5 \int_0^x dx = \int_{0,3}^{0} dv \; ; \; -1/5\, x = v \Big|_{0,3}^{0} = (0-0,3); \text{por}$$

lo tanto $x = 1,50$ m



Ejemplo 2.13.
La resistencia entre un plano inclinado 30°; cubierto por una capa de lubricante y un bloque de 50 Newtons está dada por R = 5v (newtons). Si se suelta el bloque a partir de su posición de reposo. Calcule: el tiempo necesario para que el bloque adquiera una velocidad de 4 m/seg y la distancia recorrida por el bloque.



Solución:
se sabe que W = 50 New. R = 5v (new) y v = 4 m/seg v_0 = 0 aplicamos la Segunda Ley de Newton:

$+\nearrow \Sigma Fx = ma = m\, dv/dt \quad (1)$

$50(\text{sen } 30°) - 5v = (50/g)\,dv/dt$

integrando,

$$g/50 \int_0^t dt = \int_0^4 dv/(25-5v) \text{ como}$$

$u = 25 - 5v$; $du = -5\,dv$; $dv = -du/5$ por lo tanto

$$(g/50)t = -(1/5)L[(25-5v)]_0^4 \Rightarrow t = \left(\frac{10}{g}\right) L\left(\frac{25}{25 - 5x4}\right)$$

de donde; t = 1,64 seg.

b) Cambiando en la Ec. (1); a = vdv/dx se tiene:

$+\nearrow \Sigma Fx = m\, vdv/ds$ o sea,

$50\,(1/2) - 5v = (50/g)\, v(dv/dx)$ integrando nuevamente

$$\left(\frac{g}{50}\right)\int_0^x dx = \int_0^4 vdv \,/\, (25 - 5v)$$ utilizando la

Continuación del Ejemplo 2.13....

ecuación de integración que dice:

$$\int x\,dx / (a + bx) = 1/b^2 \,[\, a + bx - a\, L\, (a + bx)]$$

para la integración anterior, con a = 25; b = - 5 y

v = 4 m/seg se obtiene finalmente

$$\frac{9,8}{50}\, x = \frac{1}{(-5)^2}\, [25 - 5v - 25\, L\, (25 - 5v)]_0^4$$

operaciones

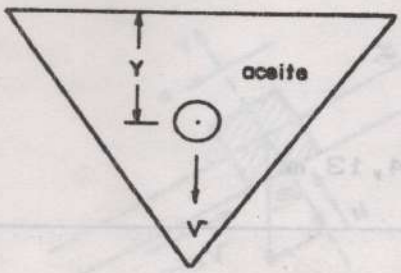
$$x = \frac{50\ (20,22)}{25 \times 9,8}\ m = 4,13\ m$$

Problemas/sec (2.5; 2.6)

2.44. Sobre un bote de motor que tiene una masa de 600 Kg, actua una fuerza resistente en dirección opuesta al movimiento del bote de magnitud R = (k v) new, donde v es la rapidez del bote. Determine el valor de la constante K si el bote está inicialmewnte viajando hacia adelante con una rapidez de 40 kms/h y cuando se para el motor se observa que la rapidez baja hasta 20 Kms/h en t = 60 seg. Qué fuerza horizontal debe proporcionar el motor para impulsar el bote hacia adelante con una rapidez constante de 20 Kms/h.

R: k = 6,93 Newxseg/m ; F = 38,50 Newtons.

2.45.



La resistencia de rozamiento de la bola de un rodamiento que cae a través del aceite es proporcional a la rapidez de la bola, R = (k v)new. La velocidad límite de la bola es de 1 m/seg y se suelta desde el reposo. Calcule el tiempo necesario para que la bola llegue a tener la mitad de su velocidad límite y la velocidad de la bola cuando el tiempo transcurrido sea el doble del obtenido en la parte inicial.

R: t = 0,071 seg ; v = 0,75 m/seg.

2.46. La resistencia del aire sobre una bola de 0,200 Kgs de masa en vuelo libre está dada por $R = 2\ (10^{-4})\ v^2$ Newtons y v (m/seg). Si la bola se deja caer a partir del reposo desde una altura de 500 m, calcule la velocidad a la cual choca contra la tierra. Qué porcentaje de la velocidad límite será el resultado?

R : v = 78,71 m/seg ; v = 79,51% de v_L

2.47.- Un objeto se deja caer sin velocidad inicial en un medio cuya resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad, con constante de proporcionalidad igual a la décima parte de la masa del cuerpo. Encontrar el tiempo necesario para alcanzar la mitad de la velocidad límite. Tome g = 10 m/seg².

R : t = 0,55 seg.

2.48. la resistencia del aire sobre un paracaidista en caída libre es kv^2. Determine la velocidad con la cual llega al suelo si su paracaidas se abre cuando su velocidad es v_0. nota: Esta velocidad final es la misma v_L que se encuentra haciendo que la distancia de caída y tienda a infinito.

R: $v = \sqrt{mg/k}$

2.49. Un cuerpo que pesa 200 Newtons se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/seg. La resitencia del aire es 0,02 v con v en m/seg.
En cuánto tiempo alcanzará el cuerpo su posición más alta. Obtener primero la ecuación general de t.

R: $t = \frac{m}{k} L (1 + kv_0/mg)$.

$t = 2,04$ seg.

2.50 Una canoa que pesa 150 Newtons mantiene una rapidez constante de 5 m/seg cuando se le está aplicando una fuerza constante de 3 Newtons. La resistencia del agua es proporcional a la rapidez de la canoa. Si la fuerza de 3 Newtons es suprimida, encontrar: a) La velocidad de la canoa y b) el espacio recorrido por ella, 15 segundos después de suprimir la fuerza.

R: a) $v = 2,79$ m/seg ; b) $x = 56,78$ m.

2.51. Un cuerpo se mueve en un medio cuya resistencia es $R = kv$ cuando $k = 2m$ y desliza bajo la acción de gravedad sobre una pista lisa inclinada 30° sobre la horizontal. Encontrar la velocidad límite v_L y el tiempo necesario para que la velocidad sea igual al 80% de v_L.

R: $v_L = 2,45$ m/seg $t = 0,80$ seg.

2.52. Un avión pesa 20 toneladas y está despegando con un empuje de 5.000 Kgs f. Si la resistencia del aire es de 1/8 de la velocidad al cuadrado, hallar la longitud mínima de la pista, sabiendo que el avión despega al llegar a una velocidad de 100 Kms/hora.

R: $x = 2.348,43$ m.

2.53. Cuando un bote de 3.200 Newtons se está moviendo con una velocidad de 3m/seg, el motor se apaga. Qué tanto más avanzará el bote, suponiendo que su resistencia al movimiento es 33 v Newtons, con v en m/seg.

R: x = 29,68 m

2.54. La rapidez límite de una gota de lluvia es v_L = 9,8 m/seg. Si la resistencia del aire es proporcional a la rapidez de la gota, cuánto tardará ésta, partiendo del reposo, en adquirir una rapidez $v_1 = 0,5\ v_L$. Hallar primero la Ec. general que da t = f (v, v_L).

R: t = L(2) seg = 0,69 seg.

2.55. Una partícula de masa m es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial $v_0 = g/2$ en un medio tal que la resistencia al avance es en todo momento equivalente a una fuerza igual a kv. Si k = m; hállese el espacio recorrido para t = 0,1 seg.

R: s = 0,42 m

2.56. Se dispara un proyectil desde el origen con velocidad v_o cuyas componentes son $(v_x)_o$, $(v_y)_o$, $(v_z)_o$; la velocidad del viento es $v_v = vj$; la resistencia del aire es proporcional a la velocidad, b es la constante de proporcionalidad.
a) deduzca expresiones para v_x, v_y; x, y, z en función de t y de las condiciones iniciales.
b) Desarrolle una expresión aproximada para z, halle el tiempo para el cual el proyectil vuelve al plano x-y y calcule el error adicional en la coordenada y,y debido a la acción del viento. Considere hasta términos del primer orden en b. Fig. Pag. III.

R: a) $v_x = (v_x)_o\, e^{bt/m}$; $x = m(v_x)_o/b\ [1-e^{-bt/m}]$

$v_y=[(v_y)_o-v]e^{-bt/m}$; $y=m/b\ [(v_y)_o-v][1-e^{-bt/m}]+ vt.$

$v_z= [mg/b + (v_z)_o]e^{-bt/m} - mg/b$;

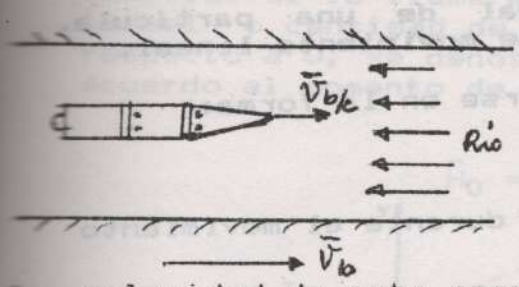
$z = [m^2g/b^2 + m(v_z)_o/b]\ [1 - e^{-bt/m}] - (mg/b)t$

b) $z = (v_z)_o t - 1/2\ gt^2$; $z = 0$ ===> $t = 2(v_z)_o/g$

$y = 2(v_z)_o(v_z)_o/g + 2vb(v_z)^2_o/mg^2$;

Error adicional = $2vb(v_z)^2/mg^2$.

2.57.



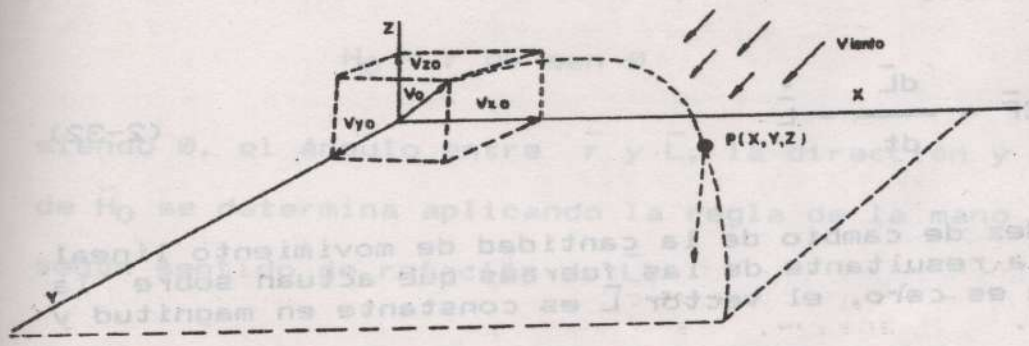
Un bote con motor fuera de borda sigue su curso en un río en sentido contrario a la corriente cuya velocidad es de 10 Kms/hora, efectuando un recorrido de 100 Kms con velocidad absoluta respecto a la tierra, de 8 Kms/hora, suponiendo que el costo horario del desplazamiento del bote es proporcional al cubo de la velocidad de esta respecto a la de la corriente, se pide:

a) Si la velocidad de 8 Kms/hora es la más conveniente desde el punto de vista económico.

b) En cuánto tiempo se ha de efectuar el recorrido para tener la máxima economía

R: La más conveniente es v_b = 5 Kms/hora

t = 20 horas



P. 2.56.

2.6 Cantidad de movimiento lineal de una partícula. Rapidez de cambio de la cantidad de movimiento lineal.

La ecuación $\bar{F} = \bar{ma}$, puede escribirse en la forma:

$$\bar{F} = m \; d\bar{v} / d\bar{t}$$

asumiendo que la masa es constante durante el movimiento

$$\bar{F} = \frac{d\,(m\bar{v})}{dt} \qquad (2\text{-}31)$$

el vector $\bar{mv} = \bar{L}$, lo llamó Newton cantidad de movimiento lineal de la partícula en su segunda definición de su Segunda Ley.

Tiene la misma dirección y sentido que el vector velocidad y su magnitud es mv.

Para un sistema de fuerzas la Ec. (2-31), se puede escribir como:

$$\Sigma\bar{F} = \frac{d\bar{L}}{dt} = \dot{\bar{L}} \qquad (2\text{-}32)$$

$\dot{\bar{L}}$ = Rapidez de cambio de la cantidad de movimiento lineal
Cuando la resultante de las fuerzas que actuan sobre la partícula es cero, el vector $\bar{L}$ es constante en magnitud y dirección.

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = 0 \;\Longrightarrow\; \bar{L} = \text{cte (Primera Ley de Newton)}$$

Así, se obtiene el principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal.

2.7.- Cantidad de movimiento angular de una partícula o momento de la cantidad de movimiento lineal.

La cantidad de movimiento lineal $\bar{L}$, para una partícula, es $\bar{L} = \bar{mv}$, donde m y $\bar{v}$ son la masa y la velocidad de la partícula, respectivamente. Al momento

del vector $\bar{L}$, con respecto al origen de un sistema inercial se le llama momento de la cantidad de movimiento lineal o cantidad de movimiento angular de la partícula respecto a O, se denota por $\bar{H}_O$, Fig. 2.12 y se expresa de acuerdo al momento de un vector como:

$$\bar{H}_O = \bar{r} \times \bar{mv} \qquad (2\text{-}33)$$

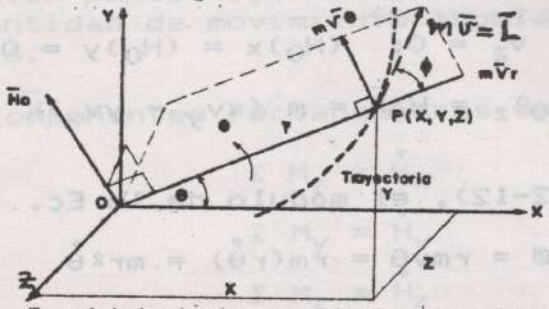


Fig. 2.12. Cantidad de movimiento lineal de una partícula

El vector $\bar{H}_O$ es perpendicular al plano que contiene a los vectores $\bar{r}$ y $\bar{mv}$ y su magnitud es:

$$H_O = r\ mv\ \text{sen}\ \emptyset \qquad (2\text{-}34)$$

siendo $\emptyset$, el ángulo entre $\bar{r}$ y $\bar{L}$, la dirección y sentido de $\bar{H}_O$ se determina aplicando la regla de la mano derecha según sentido de rotación de $\bar{L}$.

Utilizando coordenadas rectangulares para los vectores $\bar{r}$ y $\bar{L}$ en la Ec. (2-33) se tiene:

$$\bar{H}_O = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \qquad (2\text{-}35)$$

Desarrollando el determinante de la Ec (2-35) y escribiendo $\bar{H}_O = H_x\bar{i} + H_y\bar{j} + H_z\bar{k}$, sus componentes escalares son:

$$H_{Ox} = m\,(yv_z - zv_y)$$
$$H_{Oy} = m\,(zv_x - xv_z) \qquad (2\text{-}36)$$
$$H_{Oz} = m\,(xv_y - yv_x)$$

Si la partícula se mueve en el plano x, y, entonces;

$$z = 0;\quad v_z = 0;\quad (H_O)x = (H_O)y = 0 \quad y$$

$$\bar{H}_O = (\bar{H}_O)_z = H_O\bar{k} = m\,(xv_y - yv_x)\bar{K} \qquad (2\text{-}37)$$

En la Fig. (2-12), el módulo de la Ec. (2-33) es:

$$H_O = rmv\,\text{sen}\phi = rmv\theta = rm(r\dot{\theta}) = mr^2\dot{\theta} \qquad (2\text{-}38)$$

En la Fig. 2.12 se tiene:

$$\bar{H}_O = \bar{r}_x \bar{L} = \bar{r}_x\,[\,\bar{L}_r + \bar{L}_\theta\,]$$

$$\bar{H}_O = \bar{r}_x \bar{L}_\theta = \bar{r}_x\ m\ \bar{v}_\theta$$

Escalarmente,

$$H_O = rmv_\theta = rm\,r\dot{\theta}) = m\,r^2\dot{\theta}$$

donde,

$$\frac{H_O}{m} = r^2\,\dot{\theta} = \text{cantidad de movimiento angular por unidad de masa}$$

2.7.1. Rapidez de cambio de la cantidad de movimiento angular.-

Derivando ambos miembros de la Ec. (2-33), con respecto al tiempo, se tiene:

$$\dot{\bar{H}}_O = \frac{d(\bar{r}_x m\bar{v})}{dt} = \dot{\bar{r}}_x m\bar{v} + \bar{r}_x m\dot{\bar{v}} = \bar{v}_x m\bar{v} + \bar{r}_x m\bar{a}$$

como los vectores $\bar{v}$ y $m\bar{v}$ son colineales, su producto es

cero entonces $\dot{\bar{H}}_O = \bar{r}_x m\bar{a} = \bar{r}_x \bar{F} = \bar{M}_O$ por lo tanto,

$$\Sigma \bar{M}_O = \dot{\bar{H}}_O \qquad (2\text{-}39)$$

significa que el momento de la fuerza resultante con respecto a un punto fijo es igual a la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento angular, con respecto al mismo punto.

Las componentes rectangulares de la Ec. (2-39) son:

$$\Sigma M_x = \dot{H}_x$$
$$\Sigma M_y = \dot{H}_y \qquad (2\text{-}40)$$
$$\Sigma M_z = \dot{H}_z$$

Si $\bar{r}$ o $\bar{F}$ es cero, o si $\bar{r}$ y $\bar{F}$ son paralelos, entonces;
$\dot{\bar{H}}_O = 0$; y

$$\bar{H}_O = \bar{r}_x m\bar{v} = m\,[\bar{r}_x \bar{v}] = \text{constante} \qquad (2\text{-}41)$$

que es el principio de la conservación del momento de la cantidad de movimiento angular y $(\bar{H}_O)f = (\bar{H}_O)i = cte$

2.8.- **Movimiento bajo la acción de una fuerza central.**

Una fuerza central es aquella cuya línea de acción (<---•--->) pasa siempre por un punto fijo, este punto se denomina centro de la fuerza. Fig. (2.13) ejemplo: Movimiento de los planetas alrededor del sol, movimiento de la luna (así como de los satélites artificiales) alrededor de la Tierra, movimiento de un electrón alrededor del núcleo de un átomo

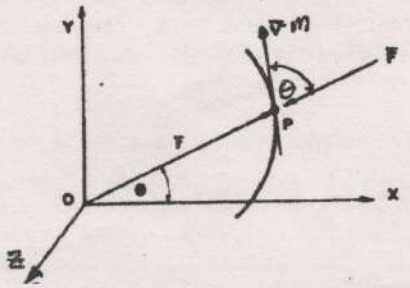


Fig. 2.13. Fuerza Central

Como $\bar{F}$ pasa por O, $\Sigma \bar{M}_O = 0$ y en la Ec. (2-39), $\dot{\bar{H}}_O = 0 = d\bar{H}/dt$, entonces $\bar{H}_O$ = constante y se dice que la cantidad de movimiento angular de una partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza central es constante, tanto en magnitud como en dirección.

Así que una partícula sujeta a una fuerza central se mueve en un plano fijo perpendicular $\bar{H}_O$, Fig. (2.14) y se cumple que

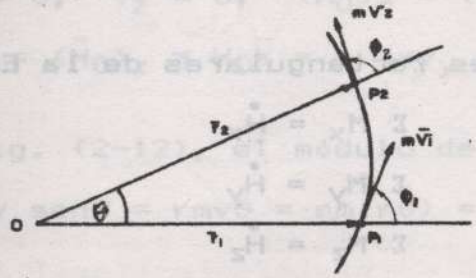
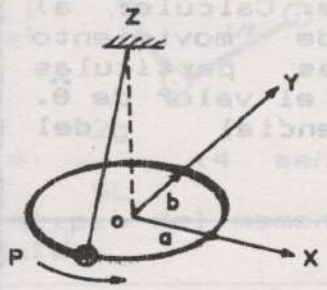


Fig. 2.14. Partícula bajo la acción de una fuerza central

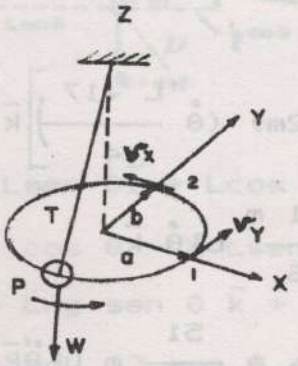
$$(\bar{H}_O)_1 = (\bar{H}_O)_2 = \text{cte entonces}$$

$$(r_1 m v_1 \text{ sen } \emptyset_1) = (r_2 m v_2 \text{ sen } \emptyset_2) \qquad (2\text{-}42)$$

Ejemplo 2.14.



una partícula pesada colgada de una cuerda se hace oscilar describiendo una pequeña trayectoria elíptica horizontal alrededor de su posición de equilibrio O. Los semiejes mayor y menor de la elipse son a y b, que quedan a lo largo de los ejes x e y respectivamente. Determine la razón v_x/v_y en la cual v_x es la velocidad de la partícula cuando pasa por el eje y, y v_y es la velocidad de la partícula cuando pasa por el eje x.



Solución:

$\Sigma M_O)_z = 0$ entonces

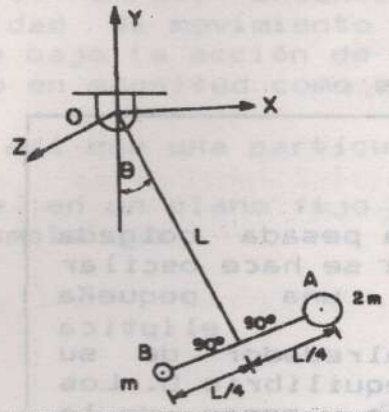
$M_O)_z = cte = m\, r_1 v_1 = m r_2 v_2$

o sea $r_1 v_1 = r_2 v_2$

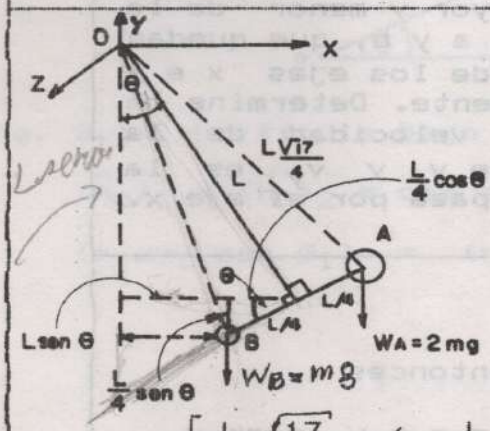
Reemplazando.

$a v_y = b v_x$

$$\frac{v_x}{v_y} = \frac{a}{b}$$



Ejemplo 2.15.
El sistema formado por las partículas A y B, cuyas masas son 2m y m, rota en el plano vertical xy. Las masas de las barras rígidas que las unen es despreciable. Calcule: a) la cantidad de movimiento angular de las partículas respecto a O y el valor de $\ddot{\theta}$. (Ec. diferencial del movimiento).



Solución:

$$\bar{H}_O = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_{i/x} \, m \, \bar{v}_i \quad \text{pero}$$

$$OA = r = \sqrt{L^2 + L^2/4} = L\left(\frac{\sqrt{17}}{4}\right)$$

y $v = \dot{\theta} r$

$$\bar{H}_O = \left[\frac{L\sqrt{17}}{4} \, m\left(\dot{\theta}\,.\,\frac{L\sqrt{17}}{4}\right) + \frac{L\sqrt{17}}{4}\,(2m)\,\left(\dot{\theta}\,\frac{L\sqrt{17}}{4}\right)\right]\bar{k}$$

entonces: $\bar{H}_O = 3m\,L^2 \times \frac{17}{16}\dot{\theta}\bar{k} = \frac{51\,m}{16} L^2\dot{\theta}\,\bar{k}$

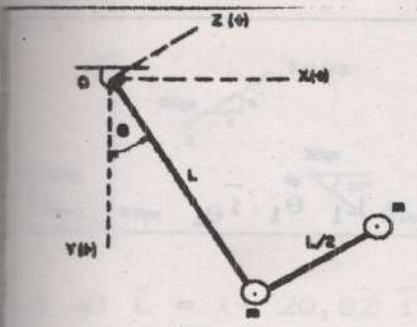
Con la ecuación $\dot{\bar{H}}_O = \Sigma\bar{M}_O$ se tiene $\dot{\bar{H}}_O = \frac{51}{16} m\,L^2\ddot{\theta}\bar{k}$

$(+\circlearrowleft) \; \Sigma M_O = -\,[mg\,(L\sin\theta - L/4\cos\theta) + 2mg\,(L\sin\theta + L/4\cos\theta)]\bar{k}$

$(+\circlearrowleft) \; \Sigma M_O = -\,mgL\,(3\sin\theta + 1/4\cos\theta)\,\bar{k}$ igualando coeficientes en k,

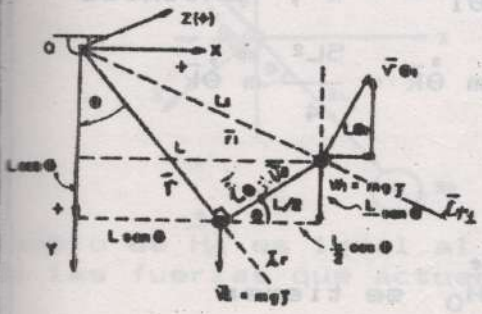
entonces $51/16\; m\,L^2\ddot{\theta} = -\,mgL\,(3\sin\theta + 1/4\cos\theta)$ de donde

$$\ddot{\theta} = -\,(4g/51L)\,.\,(12\sin\theta + \cos\theta)$$



Ejemplo 2.16.
Un péndulo rígido asimétrico está formado por dos barras de peso despeciable que sostiene dos masas iguales m. El sistema se mueve en un plano vertical, alrededor de una articulaciónh sin fricción O. Demuestre que

$\ddot{\theta} + \frac{2g}{9L}(4 \operatorname{sen}\theta + \cos\theta) = 0$. utilizando el principio del momento y de la cantidad de movimiento angular.



Solución:

(1) $\Sigma \bar{M}_O = \bar{r} \times \bar{W} + \bar{r}_1 \times \bar{W}_1$

$\bar{r} = (L \operatorname{sen}\theta \bar{i} + L \cos\theta \bar{j})$ y

$\bar{r}_1 = (L\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2} L\cos\theta)\bar{i} +$

$(L\cos\theta - L/2 \operatorname{sen}\theta)\bar{j}$

Reemplazando en la (1) y realizando operaciones se tiene:

$\bar{M}_O = (L\operatorname{sen}\theta \bar{i} + L\cos\theta \bar{j}) \times mg\bar{j} + [(L\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2} L\cos\theta)\bar{i} +$

$+ L(\cos\theta - \frac{1}{2} L\operatorname{sen}\theta)\bar{j}] \times mg\bar{j}$

$\bar{M}_O = Lmg \operatorname{sen}\theta \bar{k} + (L\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2} L\cos\theta) mg\bar{k}$

$\bar{M}_O = mgL(2 \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}\cos\theta)\bar{k}$ (1')

La cantidad de movimiento angular es:

$\Sigma \bar{H}_O = \bar{r}_x m\bar{v} + \bar{r}_1 \times m\bar{v}_1$ (2) pero

$L_1^2 = L^2 + (L/2)^2 = L^2 + L^2/4 = 5/4\ L^2$ y

$\bar{r} = L\bar{l}_r$; $\bar{r}_1 = L_1 \bar{i}_{r1}$, derivando

$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = L \frac{d\bar{i}_r}{dt} = L \frac{d\bar{i}_r}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = L\dot{\theta}\bar{i}_\theta$; ya que $\frac{d\bar{i}_r}{d\theta} = \bar{i}_\theta$

Continuación... Ejemplo 2.16.

$$\bar{v}_1 = \dot{\bar{r}}_1 = L_1 \frac{d\bar{i}_{r1}}{dt} = L_1 \frac{d\bar{i}_{r1}}{d\theta_1} \cdot \frac{d\theta_1}{dt} = L_1 \dot{\theta}_1 \bar{i}_{\theta_1}$$

ya que $\dfrac{d\bar{i}_{r1}}{d\theta_1} = \bar{i}_{\theta_1}$

Reemplazando en (2) y realizando operaciones, se tiene

$$\bar{H}_O = L\bar{i}_r \times m L \dot{\theta}\bar{i}_\theta + L_1 \bar{i}_{r1} \times L_1\dot{\theta} \bar{i}_{\theta 1} \; ; \quad \text{pero}$$

$\bar{i}r \times \bar{i}_\theta = -\bar{k}$ e $\bar{i}_{r1} \times \bar{i}_{\theta 1} = -\bar{k}$, entonces

$$\bar{H}_O = -L^2 m \dot{\theta}\bar{k} - L^2{}_1 \, m \dot{\theta}\bar{k} = -L^2 m \dot{\theta}\bar{k} - \frac{5L^2}{4} m \dot{\theta}\bar{k}$$

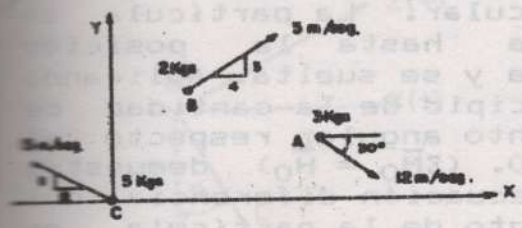
$$\bar{H}_O = -\frac{9}{4} m L^2 \dot{\theta} \bar{k}$$

Empleando la Ec. (2-39) $\Sigma\bar{M}_O = \dot{\bar{H}}_O$ se tiene:

$$mgL (2 \operatorname{sen}\theta + \tfrac{1}{2} \cos\theta) \bar{k} = -\frac{9}{4} m L^2 \ddot{\theta}\bar{k} \quad \text{finalmente}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{9L} (4 \operatorname{sen}\theta + \cos\theta) = 0$$

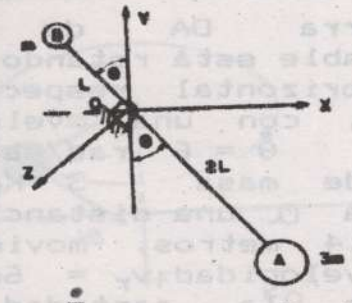
2.58.- Las partículas A,B,C, localizadas en el plano, tienen la masa y velocidad indicadas en la figura. Determine: a) la cantidad de movimiento lineal del sistema; b) la velocidad del centro de masa.



R : a) $\bar{L} = (-\ 20{,}82\ \bar{i} + 13\ \bar{j})$ New x seg.

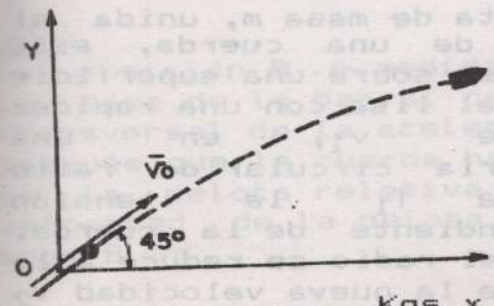
b) $\bar{v}_c = (-\ 2{,}08\ \bar{i} + 1{,}3\bar{j})$ m/seg.

2.59.- Las masas de las partículas A y B son 3m y m respectivamente y se encuentran unidas por una barra rígida de masa despreciable. La armadura rota en el plano vertical xy, alrededor del eje z. Si la cantidad de movimiento angular respecto a O es $\bar{H}_O = 13m\ L^2\ \dot{\theta}\bar{k}$ encontrar $\ddot{\theta}$ si la razón de cambio de $\dot{\bar{H}}_O$ es igual al momento resultante respecto a O de las fuerzas que actuan sobre las partículas



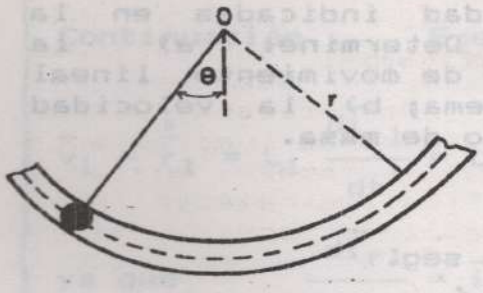
$$R : \ddot{\theta} = \frac{-\ 5g\ \text{sen}\ \theta}{13\ L}$$

2.60.- Un proyectil con masa de 2 Kgs sale de la boca del cañón con una velocidad de 400 m/seg. Determinar la cantidad de movimiento lineal y angular del proyectil con respecto al punto O, en el instante en que alcanza su altura máxima sobre su trayectoria.

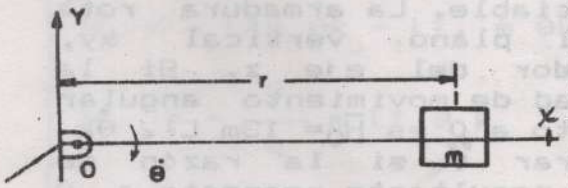


$$R : \bar{L} = 569{,}69\ \bar{i}\ \left(\frac{\text{Kgs x m}}{\text{seg}}\right);\quad \bar{H}_O = -2{,}31\bar{k}\ (\text{Mg x m}^2/\text{seg})$$

2.61.- Una partícula de masa m se coloca dentro del tubo semicircular. La partícula se desplaza hasta la posición indicada y se suelta. Aplicando el principio de la cantidad de movimiento angular respecto al punto O. ($\Sigma \bar{M}_O = \dot{\bar{H}}_O$) demuestre que la ecuación diferencial del movimiento de la partícula es $\ddot{\theta} + (g/r)\,\text{sen}\theta = 0$.

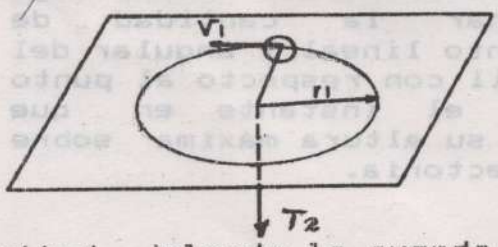


2.62.- La barra OA de masa despreciable está rotando en un plano horizontal respecto al punto O, con una velocidad angular, $\dot{\theta} = 6$ rad/seg. El bloque de masa 3 Kgs se encuentra a una distancia de O, de 0,4 metros, moviéndose con una velocidad $v_r = 6$m/seg. Determine la cantidad de movimiento lineal y angular del bloque.



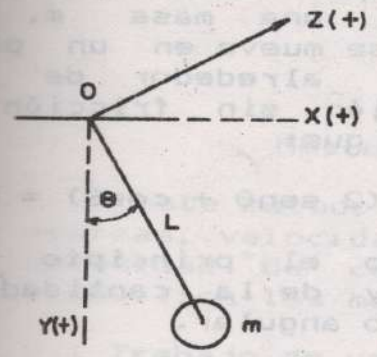
R : $\bar{L} = (18\bar{i} - 7{,}2\,\bar{j})\ \frac{\text{Kgs x m}}{\text{seg}}$; $\bar{H}_O = -\,2{,}88\,\bar{k}\left(\frac{\text{Kgs x m}^2}{\text{seg}}\right)$

2.63.- Una pelota de masa m, unida al extremo de una cuerda, está moviéndose sobre una superficie horizontal lisa con una rapidez constante v_1, en una trayectoria circular de radio r_1. Sea T_1 la tensión correspondiente de la cuerda. Después el radio se reduce a la mitad, jalando la cuerda. Determine la nueva velocidad v_2 dela pelota y la tensión T_2 en la cuerda.



R : $v_2 = 2v_1$; $T_2 = 8T_1 = 2^3 T_1$

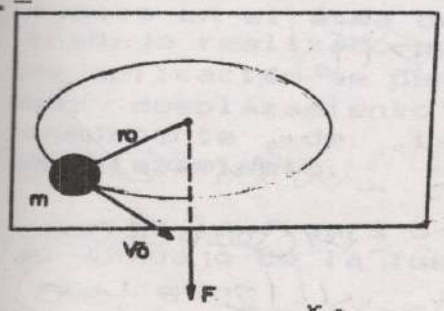
2.64.- Un péndulo simple que se mueve en un plano vertical consiste en una esfera atada a una cuerda inextensible y de masa despreciable. Usando el principio del momento y el de la cantidad de movimiento angular, demostrar que la ecuación de movimiento del péndulo está dada por:



$$\ddot{\theta} + g/L \operatorname{sen} \theta = 0$$

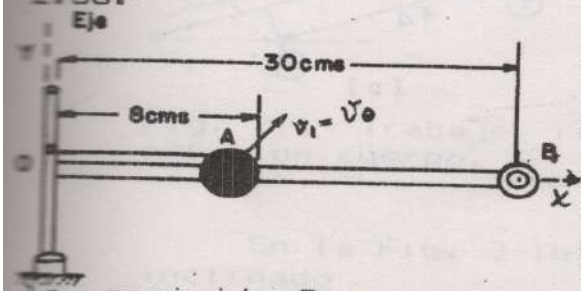
R:

2.65.- Una masa m se mueve sobre una trayectoria horizontal de radio r_0 con una rapidez v_0. Mediante la fuerza F el radio de la trayectoria se reduce a r. Hallar:
a) la nueva velocidad de m.
b) El trabajo efectuado por F.



R: a) $v = \frac{r_0}{r} v_0$; b) $\bar{F}.d\bar{r} = \frac{mv_c^2}{2}\left(\frac{r_c^2}{r^2} - 1\right)$

2.66.- Una pelota de 30 Newtons de peso está montada sobre una barra horizontal que puede girar libremente respecto a un eje vertical. En esta posición la velocidad de la pelota es v_i = 0,6 m/seg y está sostenida por una cuerda unida al eje. Repentinamente se corta la cuerda y la pelota se mueve a la posición B . A medida que la barra gira. Despreciando la masa de la barra, determinar: a) Componente radial y transversal de la aceleración de la pelota inmediatamente después que la cuerda ha sido cortada; b) la aceleración de la pelota relativa a la barra en ese instante; c) velocidad de la pelota después que ésta ha alcanzado el tope B.

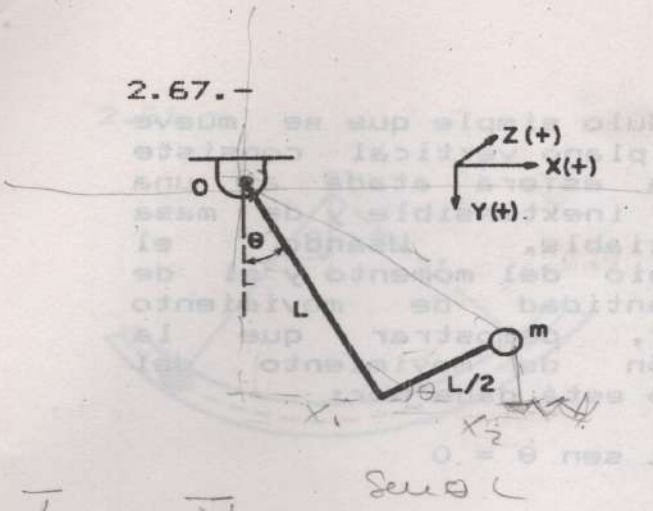


R: a) $a_r = a_\theta = 0$

b) $\ddot{r} = 4,5$ m/seg

c) $V_2 = 0,16$ m/seg

2.67.-



Un péndulo está formado por dos barras de peso despreciable que sostienen una masa m. El sistema se mueve en un plano vertical, alrededor de una articulación sin fricción O. Demuestre que:

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{5L}(2\,\text{sen}\theta + \cos\theta) = 0,$$

utilizando el principio del momento y de la cantidad de movimiento angular.

$\bar{L} = m\bar{V}$

$\bar{H}_o = \bar{r} \times m\bar{V}$

$\bar{H}_o = rmV\,\text{sen}\theta$

$V_\theta = r\dot{\theta}$

$\bar{H}_o = rmr\dot{\theta}$

$\bar{H}_o = r^2 m\ddot{\theta}$

$\dot{\bar{H}}_o = \Sigma \bar{M}_o$

$(+)\Sigma M_o = -W(X_1 + X_2) = 0$

$= -W\left(\frac{L}{2}\,\text{sen}\theta + \frac{L}{2}\cos\theta\right)$

$= -W\frac{L}{2}(2\,\text{sen}\theta + \cos\theta)$

$r^2 m\ddot{\theta} = -mg\frac{L}{2}(2\,\text{sen}\theta + \cos\theta)$

$r^2\ddot{\theta} + \frac{gL}{2}(2\,\text{sen}\theta + \cos\theta) = 0$

CAPITULO 3

Cinética de partículas
Método del trabajo y la energía

Este método es útil y ventajoso porque analiza las fuerzas, velocidad, masa y posición de una partícula sin necesidad de considerar las aceleraciones y además simplifica los métodos fundamentales de la cinética.

3.1 Trabajo de una fuerza

El vocablo trabajo tiene un significado cuantitativo exacto en el área de la mecánica. Cuantitativamente, el trabajo realizado por una fuerza F, constante, cuyo punto de aplicación se desplaza, es por definición el producto del desplazamiento del punto de aplicación por la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento.

En la figura 3-1a, F es paralela al plano inclinado, el trabajo de la fuerza es:

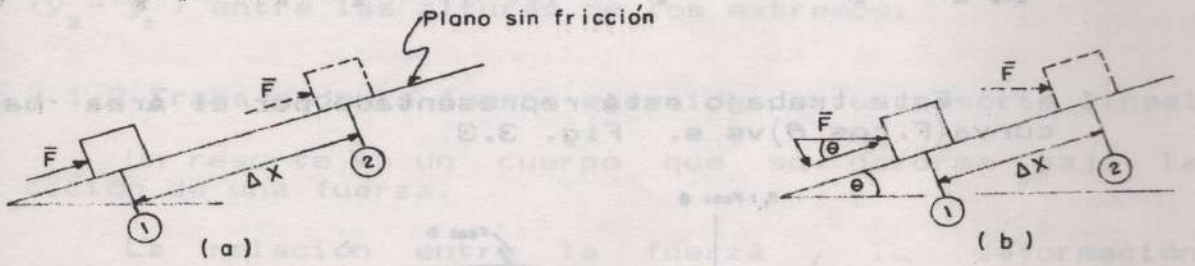


Fig. 3.1- Trabajo realizado por una fuerza constante sobre un cuerpo.

$$U = F.\ \Delta x \qquad (3\text{-}1)$$

En la Fig. 3-1b, F forma un ángulo θ con el plano inclinado

$$U = F.\ \cos\theta\ \Delta x \qquad (3\text{-}2)$$

Si la fuerza es perpendicular al desplazamiento, el trabajo es nulo o si se aplica a un punto fijo en cuyo caso

$$\Delta x = 0$$

El trabajo es una magnitud escalar y puede ser, positivo o negativo según que $\theta \lessgtr \pi/2$.

En general si la fuerza $\bar{F}$ es variable en magnitud y dirección y su punto de aplicación se desplaza un diferencial $d\bar{r}$ sobre la curva alabeada Fig. 3.2, el trabajo dU se define como el producto escalar de los vectores $\bar{F}$ y $d\bar{r}$.

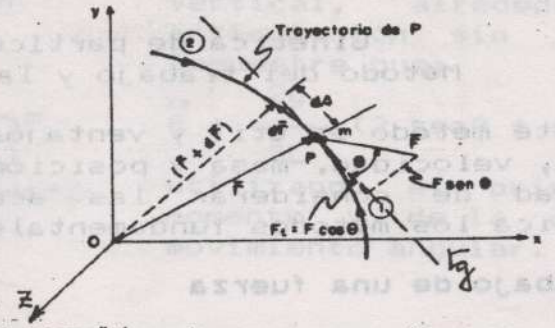


Fig. 3.2- Trabajo realizado por una fuerza variable.

$$dU = \bar{F} \cdot d\bar{r} = F(\cos\theta)ds = F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad (3\text{-}3)$$

El trabajo total $U_{1 \to 2}$ para un desplazamiento de la partícula P desde el punto (1) al punto (2) se obtiene integrando la Ec. (3-3) así:

$$U_{1 \to 2} = \int_1^2 \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_1^2 F(\cos\theta)ds = \int_1^2 (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \qquad (3\text{-}4)$$

Este trabajo está representado por el área bajo la curva $(F.\cos\theta)$ vs s. Fig. 3.3

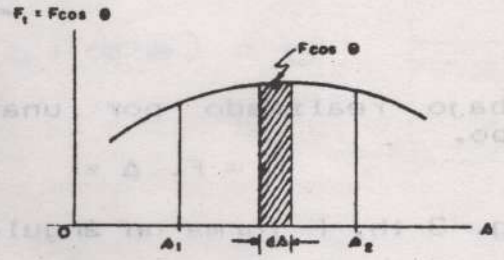


Fig. 3.3- Diagrama de F_t vs s

Casos especiales

3.1.1 Trabajo realizado por el peso $\bar{W}$

El trabajo realizado por el peso de un cuerpo, supuesto constante, es el mismo que el realizado por la fuerza de la gravedad Fig. 3.4, y constituye una importante aplicación de la Ec. (3-3).

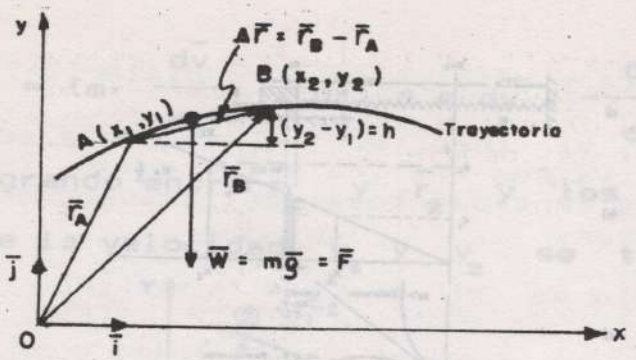


Fig. 3.4- Trabajo de $\bar{W}$.

En este caso $\bar{F} = m\,\bar{g} = -m\,g\,\bar{j}$ y $\bar{r}_B - \bar{r}_A = \Delta\bar{r}$

$$\bar{F} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\,\bar{j}$$

Sustituyendo en la Ec. (3-3) y utilizando la definición de producto escalar se tiene:

$$U_{A \rightarrow B} = -W\,(y_2 - y_1) = -Wh \qquad (3\text{-}5)$$

aquí el trabajo depende solamente de la diferencia $(y_2 - y_1)$ entre las alturas de los extremos.

3.1.2 Trabajo de la fuerza ejercida por un resorte lineal

Un resorte es un cuerpo que se deforma bajo la acción de una fuerza.

La relación entre la fuerza y la deformación depende:

a) Clase del material usado.
b) Dimensión del resorte.
c) Forma del resorte (helicoidal, espiral, cónica, voladizo, etc.)

Experimentalmente se ha demostrado que la magnitud de $\bar{F}$, ejercida por el resorte lineal sobre el cuerpo, es proporcional a la deformación x del resorte medida desde su longitud natural o indeformada, por lo tanto:

$$F = kx \qquad (3\text{-}6)$$

donde k es la rigidez del resorte, x su deformación y Lo es la longitud natural o indeformada, Fig. 3.5

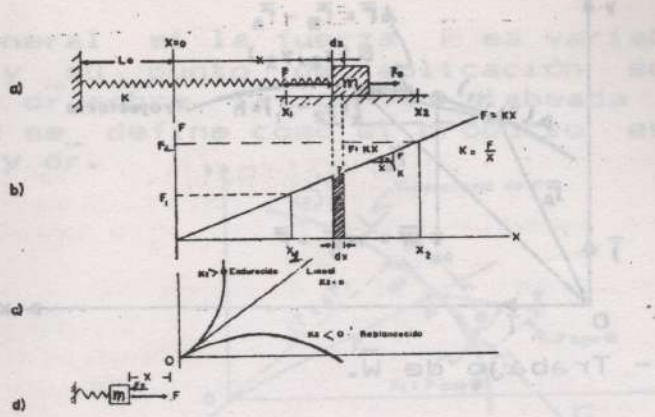


Fig. 3.5- Deformación de un resorte.

El trabajo de la fuerza $\bar{F}$ ejercida por el resorte cuando el cuerpo se mueve y alarga el resorte desde su posición inicial x_1 hasta una posición final x_2 es:

$$U_{1 \to 2} = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} - kx dx = - \frac{k}{2} (x_2^2 - x_1^2) = \qquad (3\text{-}7)$$

donde $F = - kx$ y el signo menos se debe a que el desplazamiento diferencial dx del cuerpo tiene sentido opuesto al de la fuerza F.

Si $x_2 > x_1$, el resorte se aleja de la posición indeformada, $U_{1 \to 2}$ es (-).

Si $x_2 < x_1$ el resorte está regresando a su posición indeformada $U_{1 \to 2}$ es (+).

Si el resorte está inicialmente indeformado, el trapezoide se convierte en un triángulo y $U_{1 \to 2} = (1/2)kx^2$

3.2 Energía cinética de una partícula - Principio del trabajo y la energía

Una partícula en movimiento tiene una energía cinética que es función de su velocidad. Sea una partícula de masa m que se mueve sobre una trayectoria curva, con respecto a un sistema de referencia inercial, Fig. 3.6

En base a la segunda ley de Newton $\bar{F} = m\bar{a} = m(d\bar{v}/dt)$ y multiplicando escalarmente ambos miembros de ésta ecuación por el desplazamiento infinitesimal $d\bar{r}$ se obtiene

$$\bar{F}.d\bar{r} = \left(m.\frac{d\bar{v}}{dt}\ .\ d\bar{r}\right) = m\ d\bar{v}\ .\ \frac{d\bar{r}}{dt} = m\bar{v}\ .\ d\bar{v}$$

Integrando entre $\bar{r}_1$ y $\bar{r}_2$ y los correspondientes valores de la velocidad, v_1 y v_2 se tiene:

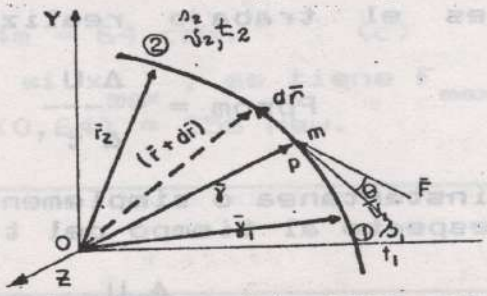


Fig. 3.6- Elementos considerados en la definición de energía cinética.

$$\int_{r_1}^{r_2} \bar{F}.d\bar{r} = \int_{v_1}^{v_2} m.v.dv = \frac{1}{2}\cdot mv_2^2 - \frac{1}{2}\cdot mv_1^2 \qquad (3\text{-}8)$$

De acuerdo a la Ec. (3-4), el resultado final puede escribirse así

$$U_{1\to 2} = \frac{1}{2}\cdot m\ v_2^2 - \frac{1}{2}\cdot mv_1^2 \qquad (3\text{-}8a)$$

La expresión $1/2.mv^2$ se llama energía cinética de la partícula, es una cantidad escalar y se representa por T.

$$T = \frac{1}{2}\cdot mv^2 \qquad (3\text{-}9)$$

La energía cinética es la capacidad de la partícula de realizar un trabajo en función de su velocidad.

$$U_{1\to 2} = T_2 - T_1 \qquad (3\text{-}10)$$

$$\text{ó} \quad T_1 + U_{1\to 2} = T_2 \qquad (3\text{-}10a)$$

La Ec. (3-10) establece que el trabajo de la fuerza $\bar{F}$ en el desplazamiento $d\bar{r}$, es igual al cambio producido en su energía cinética y describe el principio del trabajo y la energía.

Unidades:

S . I T = Kgs * m^2/seg^2 = N . m = julio

3.3 Potencia y eficiencia o rendimiento

Cuando el ingeniero diseña una máquina, es la rapidez con la que realiza el trabajo lo que importa, antes que la cantidad total de trabajo que la máquina pueda realizar.

Potencia es el trabajo realizado por unidad de tiempo

$$P_{prom} = \frac{\Delta U}{\Delta t} \qquad (3-11)$$

Potencia instántanea o simplemente potencia, es la derivada con respecto al tiempo del trabajo

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{dU}{dt} \qquad (3-12)$$

Como $dU = \bar{F} \cdot d\bar{r}$ y $d\bar{r}/dt = \bar{v}$, la Ec. (3-12) se puede escribir:

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{\bar{F} \cdot d\bar{r}}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{v} \qquad (3-13)$$

La potencia es una cantidad escalar, ya que el trabajo y el tiempo son magnitudes escalares.

Unidades –

S . I (1 vatio = 1 julio/seg = 1 $\frac{\text{New x m}}{\text{seg}}$)

Eficiencia mecánica o rendimiento

Cuando se tiene una una máquina, para obtener un trabajo de ella U_o se puede comprobar que debemos aplicar un U_a, mayor que el necesario, ya que hay que vencer la fricción en las partes móviles de las máquinas. Lógicamente a mayor perfección de la máquina menor es la diferencia entre el trabajo aplicado y el obtenido y por lo tanto su eficiencia o rendimiento será mejor.

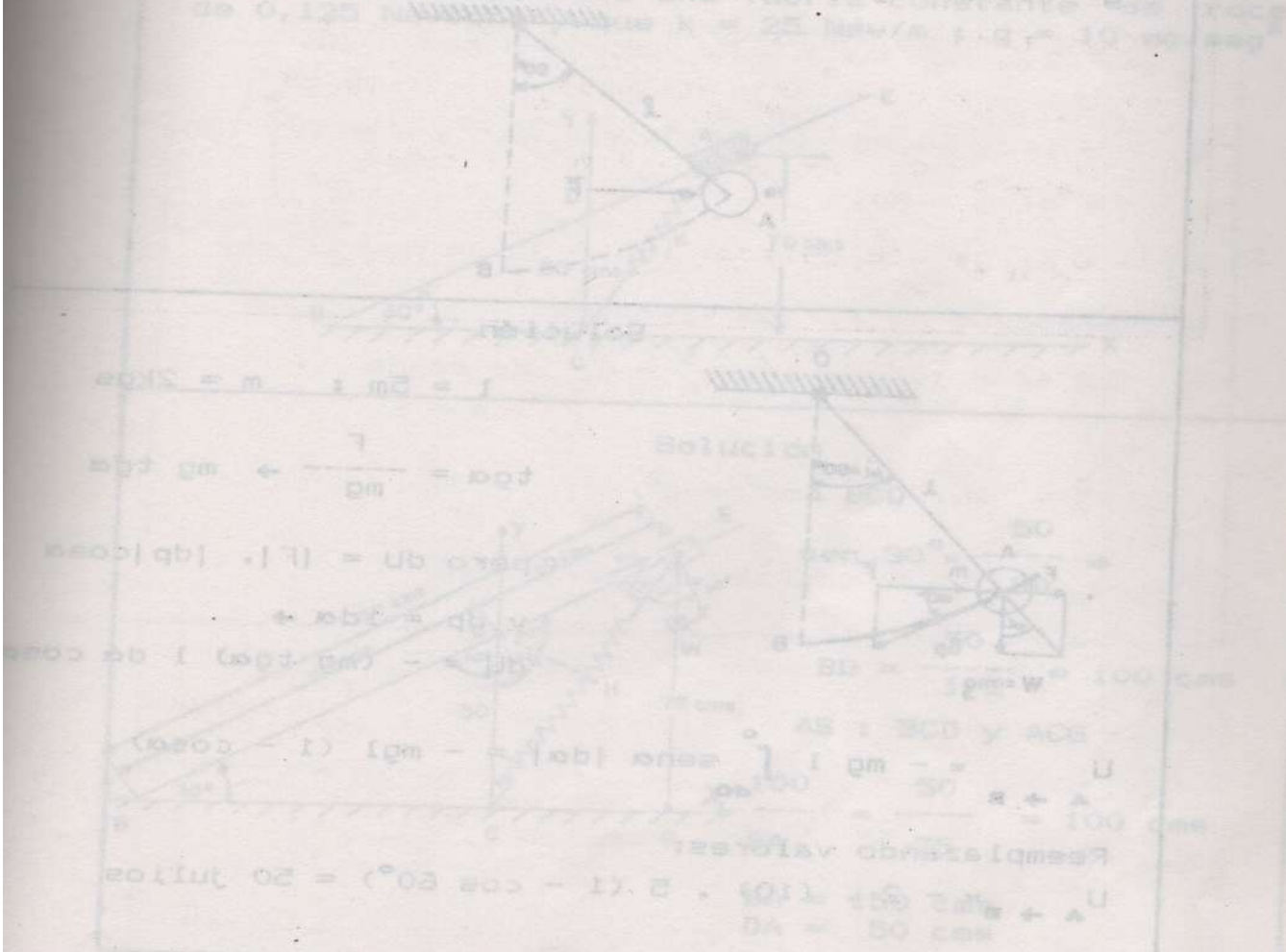
La eficiencia de una máquina es la relación entre el trabajo que se obtiene de ella y el que hay que aplicarle o sea:

$$\eta = \frac{U_{obt}}{U_{aplic}} = \frac{U_{salida}}{U_{entrada}} \qquad (3-14)$$

En función de las potencias, sería:

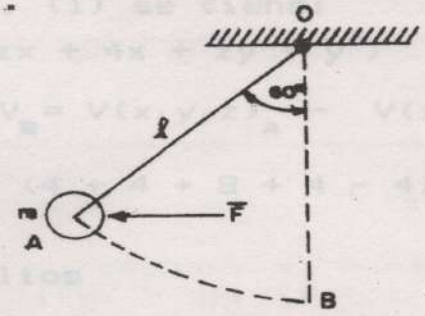
$$\eta = \frac{P_{obt}}{P_{aplic}} = \frac{P_{salida}}{P_{entrada}} < 1 \qquad (3\text{-}15)$$

Debido a la pérdida por fricción, el trabajo aplicado siempre será mayor que el obtenido, por lo tanto la eficiencia siempre es menor que 1 . La eficiencia se multiplica por 100 para escribirla en porcentajes.

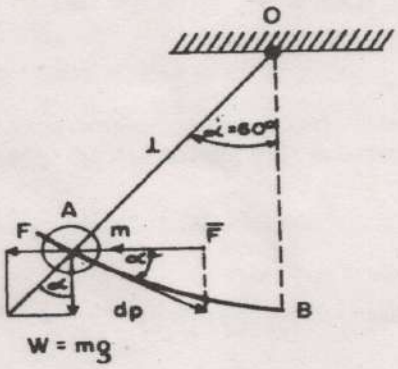


Ejemplo 3.1

El péndulo simple de longitud 5m y masa de 2 kgs, de la figura, se encuentra en equilibrio, debido a una fuerza horizontal conveniente. Se disminuye el módulo de $\bar{F}$ (siempre horizontal) hasta que la esfera del péndulo quede en posición natural de equilibrio (posición B). Calcule el trabajo realizado por $\bar{F}$. ($g = 10\ m/seg^2$) .



Solución



$l = 5m$; $m = 2kgs$

$$tg\alpha = \frac{F}{mg} \rightarrow mg\ tg\alpha$$

pero $dU = |F| . |dp| \cos\alpha$

y $dp = l\,d\alpha \rightarrow$

$dU = - (mg\ tg\alpha)\ l\ d\alpha \cos\alpha$

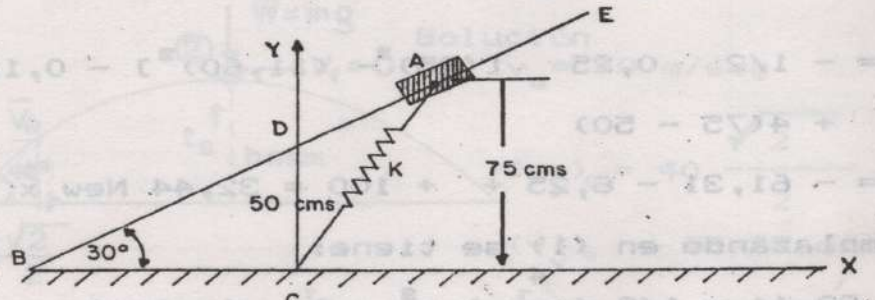
$$U_{A \rightarrow B} = - mg\ l \int_{d0}^{\circ} sen\alpha\ |d\alpha| = - mgl\ (1 - cos\alpha)$$

Reemplazando valores:

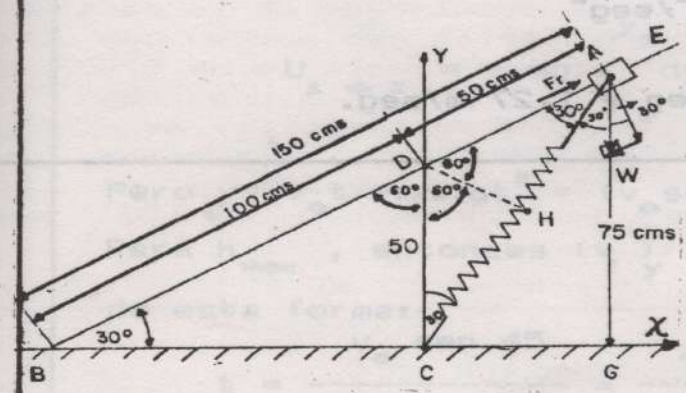
$U_{A \rightarrow B} = - 2 . (10) . 5\ (1 - \cos 60^\circ) = 50$ julios

Ejemplo 3.2

El cuerpo A que se muestra en la figura pesa 4 News y puede deslizar a lo largo de la barra fija BE. Cuando el resorte que está conectado entre el punto C y la masa A está sin estirar, tiene 75 cms. Si el cuerpo se abandona desde el reposo A, cuál es la rapidez al pasar por D en el eje y. Suponga que sobre A está aplicada una fuerza constante de roce de 0,125 Newtons y que k = 25 New/m ; g = 10 mg/seg^2



Solución



Δ BCD

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{50}{BD} \rightarrow$$

$$BD = \frac{50}{1/2} = 100 \text{ cms}$$

ΔS : BCD y ACG

$$\frac{100}{BA} = \frac{50}{75} = 100 \text{ cms}$$

BA = 150 cms
DA = 50 cms

continuación del ejemplo 3.2

$CA = 2\ AH = 2(50 \cos 30^{\circ}) = 86,60$ cms

alargamiento: $x_A = 86,\ 60 - 75 = 11,60$ cms

comprensión: $x_D = 75 - 50 = 25$ cms

$U_T = T_2 - T_1 = 1/2\ mv_2^2 - 1/2\ mv_1^2$ (1) pero

$U_T = 1/2\ k\ (x_d^2 - x_a^2) - Fr\ (AD) + W\ (AG - CD)$

$U_T = -\ 1/2\ \ 0,25\ \ [(25)^2 - (11,60)^2] - 0,125\ (50)$

$+\ 4(75 - 50)$

$U_T = -\ 61,31 - 6,25 + \ + 100 = 32,44$ New x cms

Reemplazando en (1) se tiene:

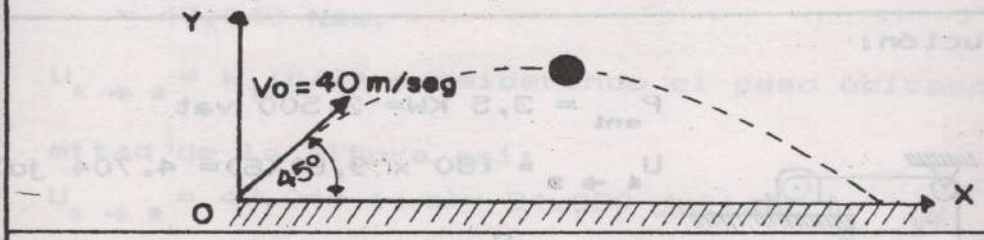
$$32,44 = 1/2\ \left(\frac{4}{10^3}\right) v_D^2 - 0, \quad \text{de donde}$$

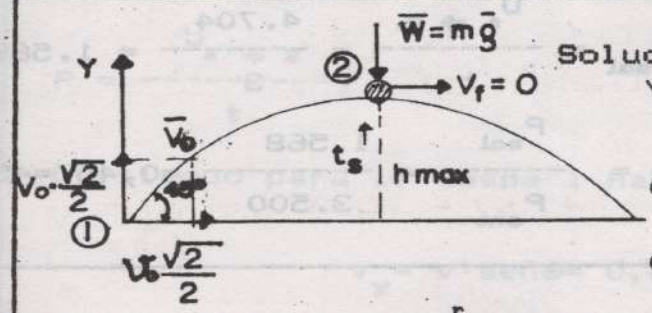
$$v_D^2 = 16.220\ \ cms^2/seg^2$$

$$v_D = 127,36\ cms/seg = 1,27\ m/seg.$$

Ejemplo 3.3

Se lanza una pelota desde la tierra con v_o= 40m/seg y con un ángulo de tiro de 45°. Encuentre el trabajo realizado por la gravedad cuando la pelota pasa de su posición inicial hasta el punto más alto de su trayectoria. g= 10m/seg².





Solución

v_o= 40 m/seg

$$(v_y)_o = 40\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2}$$

$$(v_y)_o = 28{,}28 \text{ m/seg}$$

$$U_{1\to 2} = \int_{r_1}^{r_2} \bar{F}.d\bar{r} = \int_{r_1}^{r_2} (-mg\bar{j}).(dx\bar{i} + dy\bar{j})$$

$$U_{1\to 2} = -mg\int_{y_1}^{y_2} dy = -mg(y_2 - y_1) \qquad (1)$$

Pero $y = v_o t - \frac{1}{2}.gt^2 = (v_o \operatorname{sen}\alpha)t - \frac{1}{2}.gt^2$ (2)

Para h_{max}, entonces $(v_f)_y = 0 = (v_o \operatorname{sen}\alpha) - gt$

de esta forma:

$$t_s = \frac{v_o \operatorname{sen} 45}{g} = \frac{40\sqrt{2}/2}{10} = 2{,}83 \text{ seg}$$

Reemplazando en (2) se tiene:

$h_{max} = y_2 = (40 \times \sqrt{2}/2)(2{,}83) - \frac{1}{2}(10)(2{,}83)^2 = 40{,}04\text{m}$

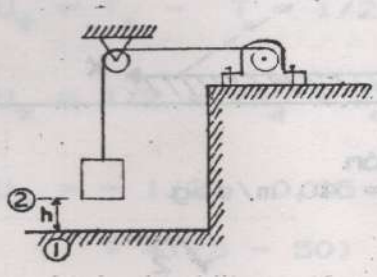
Reemplazando en (1) →

$U_{1\to 2} = -m\,(10).(40{,}04-0) = -(400{,}4)\text{m (julios)}$

Ejemplo 3.4

Un motor sube una caja cuya masa es de 80 kgs hasta una altura h= 6 metros en 3 segundos. Si la potencia indicada del motor es de 3,5 kw. determine la eficiencia del motor. La caja sube con una rapidez constante.

Solución:

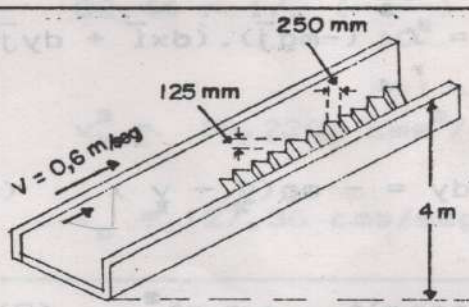


P_{ent} = 3,5 KW= 3.500 vat

$U_{1 \to 2}$ = (80 x 9,8)(6)= 4.704 julios

$$P_{sal} = \frac{U_{1 \to 2}}{t} = \frac{4.704}{3} = 1.568 \text{vat}$$

$$\eta = \frac{P_{sal}}{P_{ent}} = \frac{1.568}{3.500} = 0,45 = 45\ \%$$



Ejemplo 3.5

Los escalones de la escalera eléctrica se mueven con una rapidez constante de 0,6m/seg Si los escalones son de 125 mm de peralte y de 250mm de huella, determine la potencia necesaria de un motor para levantar una masa promedio de 150 kgs por escalón. Hay 32 escalones.

Solución

v= 0,6 m/seg; altura de los escalones = 125mm= 0,125m

m= 150 kgs; N° de los escalones= $\frac{4}{0,125}$ = 32 N.

continuación del ejemplo 3.5

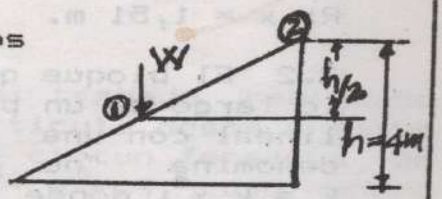
huella= 250 mm= 0,250 m

W_T = carga total = $N_\bullet * W = N_\bullet (mg) = 32 * 150 * 9,8$

= 47.040 New.

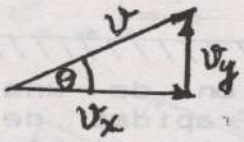
$U_{1 \to 2} = W_T(h/2)$ considerando el peso ubicado en la mitad de la altura así:

$U_{1 \to 2} = 47.040\ (4/2) = 94.080$ julios



$$P = \frac{U_{1 \to 2}}{t}$$

El tiempo para ir desde 1 hasta 2 se obtiene así:



$$v_y = v \operatorname{sen}\theta = 0,6\left(\frac{4}{\sqrt{[32(0,25)]^2 + (4)^2}}\right)$$

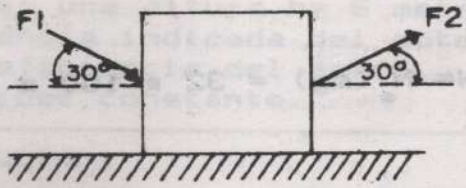
$$v_y = \frac{0,6 * 4}{8,94} = 0,27 \text{ m/seg}$$

como v= cte $\rightarrow v_y = \frac{h/2}{t}$; $t = \frac{h/2}{v_y} = \frac{(4/2)}{0,27} = 7,41$seg

$$P = \frac{U_{1 \to 2}}{t} = \frac{94.080}{7,41} = 12.696,36 \text{ vatios} = 12,70\text{Kwats}$$

Problemas secs (3.1, 3.2, 3.3)

3.1



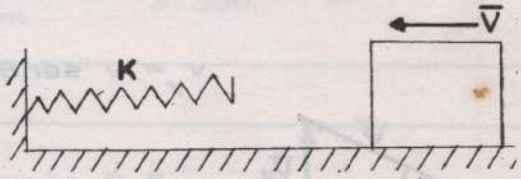
Un bloque cuya masa es de 100 kgs, se encuentra sometido a la acción de dos fuerzas: F_1 = 600 Newtons y F_2 = 1.000 New

Si el bloque se encuentra en reposo encuentre la distancia recorrida cuando adquiera una velocidad de 6 m/seg y μ = 0,25 entre las superficies en contacto.

R: x = 1,51 m.

3.2 El bloque que tiene una masa m= 2Kgs, se desliza a lo largo de un plano liso y choca contra un resorte no lineal con una rapidez de 5 m/seg. El resorte se denomina "no lineal" ya que tiene una resistencia de $F_r = k\,x^2$, donde k= 1.000 New/m . Determine la rapidez del bloque después de que ha comprimido al resorte x= 0,2 m.

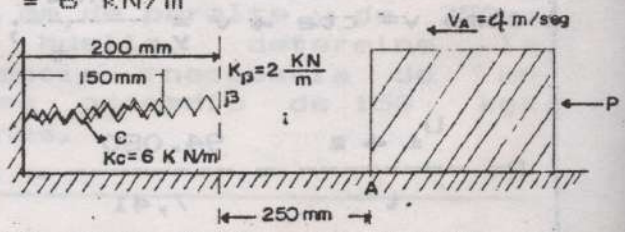
R: v_2 = 4,73 m/seg.



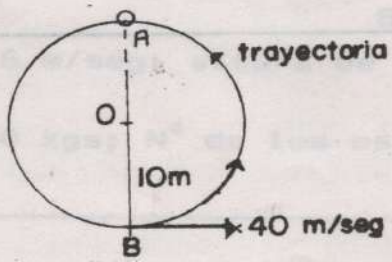
3.3 Un bloque está sujeto a la acción de una fuerza horizontal de P= 20 New y tiene una rapidez de 4 m/seg cuando está en el punto A. μ = 0,25 entre el bloque de 5 Kgs y la superficie. Determine la máxima deformación del resorte exterior B y del resorte interior C cuando llega al reposo. k_B = 2 kN/m y k_C = 6 kN/m

R: x_B = 141 mm ;

x_C = 91 mm



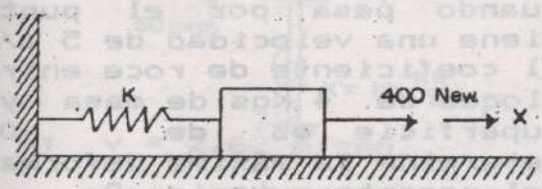
3.4



Un peso está oscilando en el plano vertical, unido por una cuerda al punto O. La rapidez en el punto más bajo es 40m/seg ¿Cuál es la rapidez al pasar por el punto A ?

R: v_A = 34,76 m/seg.

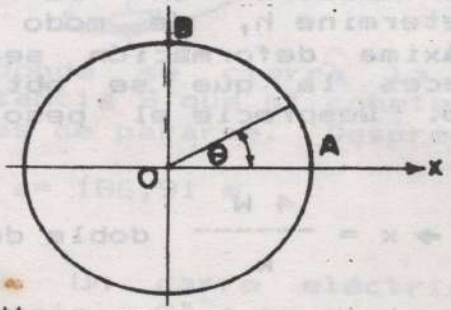
3.5



En la figura, el bloque se pone en movimiento aplicándole una fuerza constante de 400 Newtons Originalmente el resorte está comprimido 30 cms de su longitud . Determine la velocidad del bloque después de que se ha desplazado 60 cms a partir del reposo. El coeficiente de roce entre el bloque y el suelo es 0,1; k= 16 New/m y la masa del bloque es 100 Kgs. El bloque y el resorte están unidos.

R: v = 1,89 m/seg

3.6

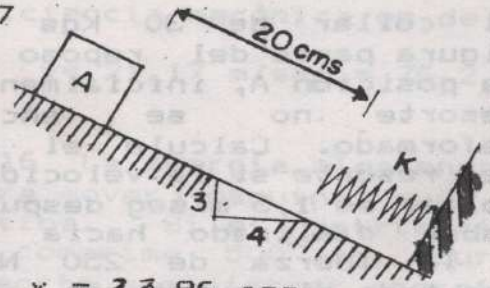


Encontrar el trabajo realizado por una partícula desde A hasta B sobre la circun ferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 4$, cuyo centro es el origen, sabiendo que el campo de fuerzas correspondiente es:

$\bar{F} = x\bar{i} + (x + y)\,\bar{j}$

R: $U_{A \rightarrow B} = \pi$

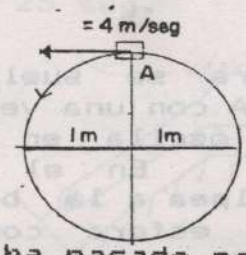
3.7



Un cuerpo A de 5 Kgs de masa se encuentra a 20 cms del resorte cuando su velocidad es de 2 m/seg, en descenso. Si k= 1800 N/m y μ= 0,20 entre A y el plano inclinado; Cuál es la distancia total que recorre el cuerpo A antes de detenerse.

R: x = 33,86 cms

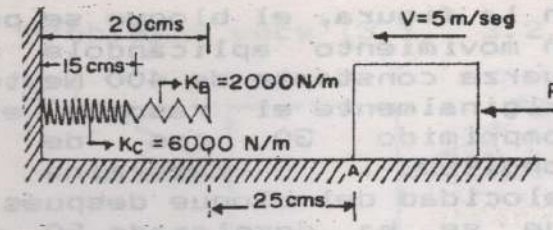
3.8



Un cuerpo A, cuyo peso es de 20 Newtons gira en un círculo vertical en el extremo de una cuerda de longitud 1 metro. Su velocidad en la parte más alta es de 4 m/seg. Encuentre la tensión en la cuerda a los 120° cuando ha pasado por su posición más alta en sentido antihorario.

R: T= 102 Newton

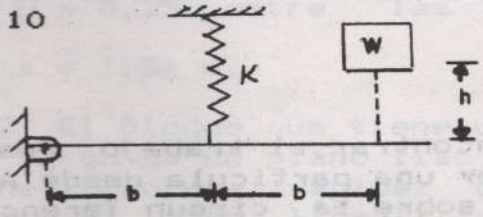
3.9



Sobre el bloque de la figura actúa una fuerza P= 30 New y cuando pasa por el punto A tiene una velocidad de 5 m/seg. El coeficiente de roce entre el bloque de 4 Kgs de masa y la superficie es de 0,20. Determine la máxima deformación del resorte exterior B.

R: x_{max} = 15,7 cms

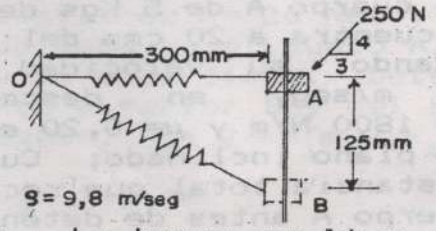
3.10



Un peso W se deja caer desde una altura h sobre una barra sostenida por un resorte como se muestra en la figura. Determine h, de modo que la máxima deformación sea tres veces la que se obtiene al final en equilibrio estático. Desprecie el peso de la barra. Qué pasa si h = 0 ?

R: $h = \frac{6W}{k}$; si h = 0 $\Rightarrow x = \frac{4W}{k}$ doble del valor estático $x = \frac{2W}{k}$

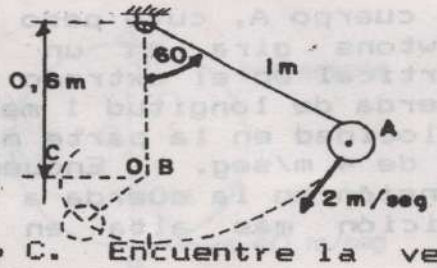
3.11



El collar de 30 Kgs de la figura parte del reposo desde la posición A, inicialmente el resorte no se encuentra deformado. Calcule el módulo del resorte si la velocidad del collar es 1,5 m/seg después de haber deslizado hacia abajo 125mm. La barra es lisa y la fuerza de 250 Newtons conserva su pendiente durante todo el movimiento.

R: k= 89,6 kN/m.

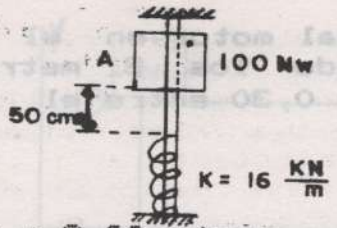
3.12



Una esfera se suelta de la posición A con una velocidad de 2 m/seg y oscila en un plano vertical. En el fondo la cuerda golpea a la barra fija en B y la esfera continua su movimiento hasta llegar al punto C. Encuentre la velocidad de la esfera en la posición C.

R: v_c = 2,44 m/seg.

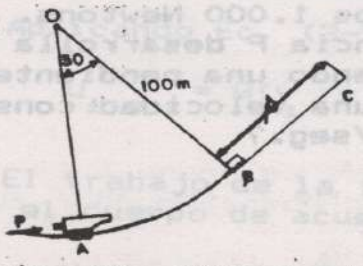
3.13



El collar cilíndrico A que pesa 100 Newtons, se suelta del reposo y cae sobre el resorte. Encuentre la velocidad del cilindro cuando el resorte se ha comprimido 5 cms.

R: $v_c = 2.62$ m/seg.

3.14



Un cohete de propulsión, con masa total de 100 Kgs parte del reposo en A y se mueve con fricción despreciable a lo largo de la pista ABC en el plano vertical mostrado. Si la propulsión del cohete ejerce un empuje constante P= 2 KN de A a B donde se cierra la llave del gas, encuentre la distancia S que el cohete rueda sobre la pista inclinada antes de pararse. Desprecie la masa de gas perdida.

R: s= 186,91 m

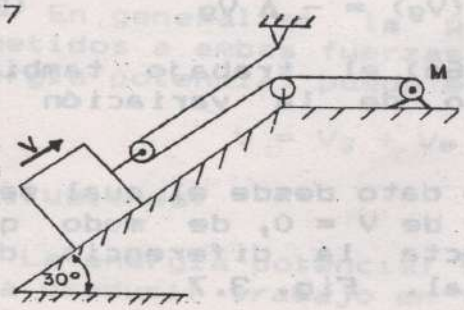
3.15 Un carro eléctrico consume 320 Kilovatios de potencia. Si éste tiene una masa de 15.000 Kgs. y viaja a lo largo de una vía horizontal. Qué rapidez adquiere el carro en 15 segundos partiendo del reposo ? Su eficiencia mecánica es de 0,70

R: v= 21,17 m/seg.= 76,2 kms/hora

3.16 La energía almacenada por un resorte se utiliza para mover una máquina que necesita una potencia de 40 vatios. Si el resorte tiene una constante k= 8 KN/m y se comprime 500 mm, durante cuánto tiempo puede el resorte suministrar energía ?

R: t= 25 seg.

3.17

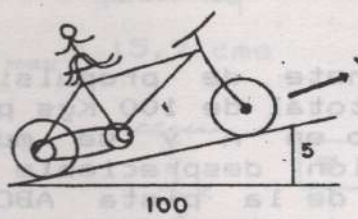


Un cuerpo cuya masa es de 50 kgs se sube por un plano inclinado utilizando un motor y un sistema de poleas. El cuerpo parte del reposo y mediante una aceleración constante, adquiere una rapidez de 4 m/seg, después de desplazarse 8 metros sobre el plano inclinado. ¿Cuál es la

potencia que debe suministrarse al motor en el instante en que el cuerpo se ha desplazado los 8 metros ? La eficencia del motor es 0,75 y μ= 0,30 entre el cuerpo y el plano inclinado.

R: P_{ent} = 2,25 k. vatios (KW)

3.18



Un hombre y su bicicleta pesan juntos 1.000 Newtons. ¿Qué potencia P desarrolla el hombre subiendo una pendiente del 5 % con una velocidad constante de 10 m/seg.?

R: P= 4,88 K. vatios

3.19 El vector de posición de una partícula está dado por $\bar{r}$= [1,5t$\bar{i}$ + $t^2\bar{j}$ - 0,5 (t^3- 1)$\bar{k}$] metros. Para t= 4 segundos, encuentre la potencia desarrollada por la fuerza $\bar{F}$= (60 $\bar{i}$ - 25 $\bar{j}$ - 40 $\bar{k}$) Newtons, cuando actúa sobre la partícula.

R: P_{ent}= 0,85 KW

3.4 Energía potencial

El trabajo realizado por el peso W de un cuerpo cuando se mueve o desplaza del nivel 1 al 2 a lo largo de una trayectoria arbitraria es según Ec. (3-5)

$$U_{1 \to 2} = Wy_1 - Wy_2 = - Wh \qquad (3\text{-}16)$$

El trabajo de W es independiente de la trayectoria y depende del desnivel h entre los dos puntos o de la diferencia entre los valores de una cantidad Vg evaluados en los puntos inicial y final. La cantidad $V_g = Wy$ se llama energía potencial gravitacional, entonces:

$$U_{1 \to 2} = (V_g)_1 - (V_g)_2 = - \Delta V_g \qquad (3\text{-}16a)$$

De acuerdo a la Ec. (3-16a) el trabajo también se puede definir como el negativo de la variación de la energía potencial.

El nivel de referencia o dato desde el cual se mide la altura, y, es arbitrario y de V = 0, de modo que la suma de una constante no afecta la diferencia de los valores de la energía potencial. Fig. 3.7

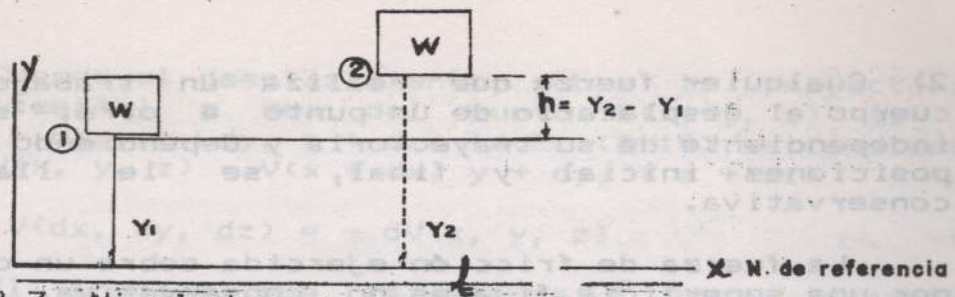


Fig. 3.7 Nivel de referencia o dato

Aplicando Ec. (3-16) a la Fig. 3.7 se tiene:

$$U_{1 \to 2} = W(y_1 + \ell) - W(y_2 + \ell) = Wy_1 - Wy_2 = -Wh$$

El trabajo de la fuerza $\bar{F}$ ejercida por el resorte sobre el cuerpo de acuerdo a la Ec. (3-7) es:

$$U_{1 \to 2} = -k/2(x_2^2 - x_1^2) = 1/2kx_1^2 - 1/2.kx_2^2 \qquad (3-17)$$

donde x_1 es la posición inicial del resorte y x_2 es la posición final, ya sea que éste se alargue o se comprima.

Este trabajo puede ser expresado también como la diferencia entre los valores de una cantidad V_e evaluados en los puntos inicial y final. La cantidad $V_e = 1/2kx^2$ (3-17a), se llama energía potencial elástica, entonces:

$$U_{1 \to 2} = (V_e)_1 - (V_e)_2 = -\Delta V_e \qquad (3-17b)$$

El trabajo de la fuerza elástica depende sólo de las longitudes inicial y final x_1 y x_2 del resorte, es además negativo debido a que la fuerza del resorte siempre está en dirección opuesta al desplazamiento del cuerpo.

La Ec. (3-17b) es válida sólo si la deformación del resorte se mide desde su longitud natural.

En general si la partícula o el cuerpo están sometidos a ambas fuerzas; gravitacional y elástica, la energía potencial puede expresarse como:

$$V = V_g + V_e \qquad (3-18)$$

Conclusiones:

1) La energía potencial V, es la capacidad de un cuerpo para producir trabajo en función de su posición.

2) Cualquier fuerza que realiza un trabajo sobre un cuerpo al desplazarlo de un punto a otro, siendo éste independiente de su trayectoria y dependiendo sólo de las posiciones inicial y final, se le llama fuerza conservativa.

La fuerza de fricción ejercida sobre un objeto móvil por una superficie fija es no conservativa, ya que el trabajo realizado por ella depende de la trayectoria, entre más longitud tenga mayor será el trabajo. Este trabajo siempre será negativo y se disipa del cuerpo en forma de calor. Una fuerza que depende de la velocidad es también no conservativa.

La fricción en los fluídos se opone a la velocidad y su valor es f(v), más no de la posición, por lo tanto es $\bar{F}$ no conservativa.

3.5 Fuerzas conservativas

Una fuerza es conservativa si el trabajo efectuado por ella es independiente de la trayectoria y depende sólo de las posiciones inicial y final.

En general, si una partícula se localiza en un punto arbitrario P(x, y, z) en el espacio, su energía potencial V(x, y, z) en función de su posición se le llama función potencial de la fuerza conservativa $\bar{F}$. El trabajo $U_{1 \Rightarrow 2}$ de la fuerza $\bar{F}$ entre los puntos arbitrarios P_1 y P_2 Fig. 3.8, se mide entonces por la diferencia de estas funciones potenciales así:

$$U_{1 \to 2} = V_1(x_1, y_1, z_1) - V_2(x_2, y_2, z_2) \qquad (3\text{-}19)$$

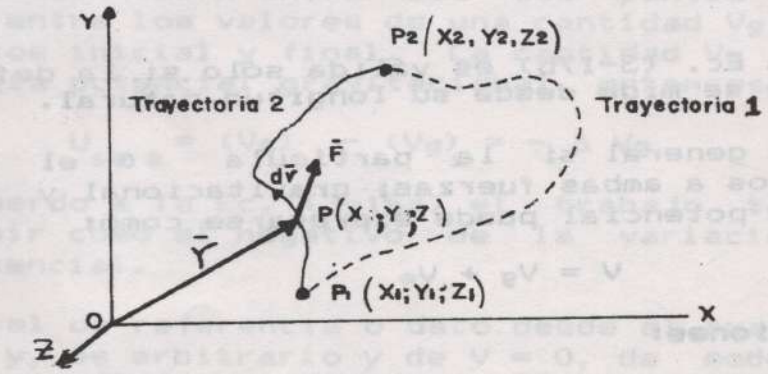


Fig. 3.8 Análisis general de un sistema conservativo.

O simplemente

$$U_{1 \Rightarrow 2} = V_1 - V_2 \qquad (3\text{-}19a)$$

Cuando el desplazamiento sobre la trayectoria es infinitesimal o sea del punto P(x, y, z) al punto P' (x + dx; y + dy, z + dz) la Ec.(3-19) se convierte en: $dU = V(x, y, z) - V(x + dx, y + dy, + z + dz)$ y

$$dU = - V(dx, dy, dz) = - dV(x, y, z) \qquad (3\text{-}20)$$

El trabajo que la fuerza $\bar{F}$ hace durante el desplazamiento dr es $dU = \bar{F}.dr = F_x dx + F_y dy + F_z dz$, reemplazando éste resultado en la Ec. (3-20) y expresando la diferencial total o exacta dV(x, y, z) en términos de sus derivadas parciales se tiene:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = - \frac{\partial V}{\partial x} dx - \frac{\partial V}{\partial y} dy - \frac{\partial V}{\partial z} dz \qquad (3\text{-}20a)$$

$$(F_x + \partial V/\partial x)dx + (F_y + \partial V/\partial y)dy + (F_z + \partial V/\partial z)dz = 0$$

Los coeficientes de los diferenciales son nulos, luego

$$F_x = - \partial V/\partial x, \quad F_y = - \partial V/\partial y, \quad F_z = \partial V/\partial z \qquad (3\text{-}21)$$

La Ec. (3-20a) puede escribirse usando la notación vectorial así:

$$\bar{F} = \underbrace{-\left[\frac{\partial V}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\bar{k}\right]}_{\text{gradiente de la función escalar V}}$$

$$\bar{F} = \underbrace{-\left[\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right]}_{\text{operador nabla } \bar{\nabla}} V \text{ o sea}$$

$$\bar{F} = - \overline{\text{grad}}\ V = - \bar{\nabla} . V \qquad (3\text{-}21a)$$

es decir la fuerza $\bar{F}$ es el gradiente de una función escalar V llamada "el potencial" o "la energía potencial del campo".

Las derivadas parciales de F_x y F_y de la Ec. (3-21) calculadas con respecto a "y" y a "x" respectivamente son:

$$\partial F_x/\partial y = -\partial^2 V/\partial y\partial x \quad \text{y} \quad \partial F_y/\partial x = -\partial^2 V/\partial x\partial y \qquad (3\text{-}22)$$

como el orden de las derivadas parciales es inmaterial, entonces:

$$\partial F_x/\partial y = \partial F_y/\partial x \qquad (3\text{-}22a)$$

de manera análoga:

$$\partial F_y/\partial z = \partial F_z/\partial y \qquad (3\text{-}22b)$$

$$\partial F_z/\partial x = \partial F_x/\partial z \qquad (3\text{-}22c)$$

si se cumplen las Ecs. (3-22a, b, c) para todo x, y, z, entonces la $\bar{F}$ es conservativa.

Esto mismo se podría demostrar diciendo que si el rotacional de un vector fuerza $\bar{F}$ es igual a cero, $\bar{F}$ es conservativa.

$$\text{rot. de } \bar{F} = \bar{\nabla} \times \bar{F} = 0 \qquad (3\text{-}23)$$

Desarrollando esta determinante se obtendrían las Ecs. (3-22a, b y c)

$$\text{rot. de } \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = [0;\ 0;\ 0]$$

Además una fuerza es conservativa si el trabajo realizado por ella en una trayectoria cerrada, sin intersectarse es igual a cero, ésto es:

$$\oint \bar{F} \cdot d\bar{r} = 0 \qquad (3\text{-}24)$$

En éste caso $V_1 = V_2$ en la Ec. (3-19a) y $U_{1 \to 2} = 0$

A la integral anterior se le llama de línea o de circulación de $\bar{F}$.

Método práctico para hallar la función potencial V si se conocen sus derivadas parciales en x, y, z.

1- Demostrar que $\bar{F}$ es conservativa.

2- Integrar cada una de las tres ecuaciones en f(x), f(y), f(z) más una constante de integración de las otras dos funciones, para cada ecuación.

3- Escogemos una de las tres ecuaciones y tendremos la función potencial V(x, y, z).

4- Los términos que se repiten y los que no se repiten de las otras dos ecuaciones se toman una sola vez.

Nota: Al derivar respecto a x, se pierden los términos en z, en y o en ambos (y,z); luego al integrar se deben considerar esos puntos colocando un término más denominado g(y,z) y así para las otras ecuaciones.

3.6 Conservación de la energía de una partícula

Cuando una partícula está sometida a la acción de un sistema de fuerzas conservativas, se pueden combinar la Ec. (3-19a) con la ecuación general (3-10) empleada para fuerzas conservativas y no conservativas, lo que nos dá:

$$V_1 - V_2 = T_2 - T_1$$

o sea: $(T + V)_1 = (T + V)_2$ (3-25a)

lo cual significa que la suma de las energías cinética y potencial es constante en cualquier posición de la partícula, cuando se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas. La Ec. (3-25a) establece el principio de conservación de la energía mecánica.

La cantidad T + V es llamada la energía mecánica total de la partícula y se simboliza con la letra E o sea que

$$E = T + V = cte \qquad (3\text{-}26)$$

En general, la energía mecánica total E de una partícula en las posiciones 1,2,3,..... n es

$$E_1 = E_2 = E_3 = ... E_n = \text{constante} \qquad (3\text{-}27)$$

Por ejemplo cuando se deja caer una pelota $\bar{W}$ desde una altura h del suelo Fig. 3.9

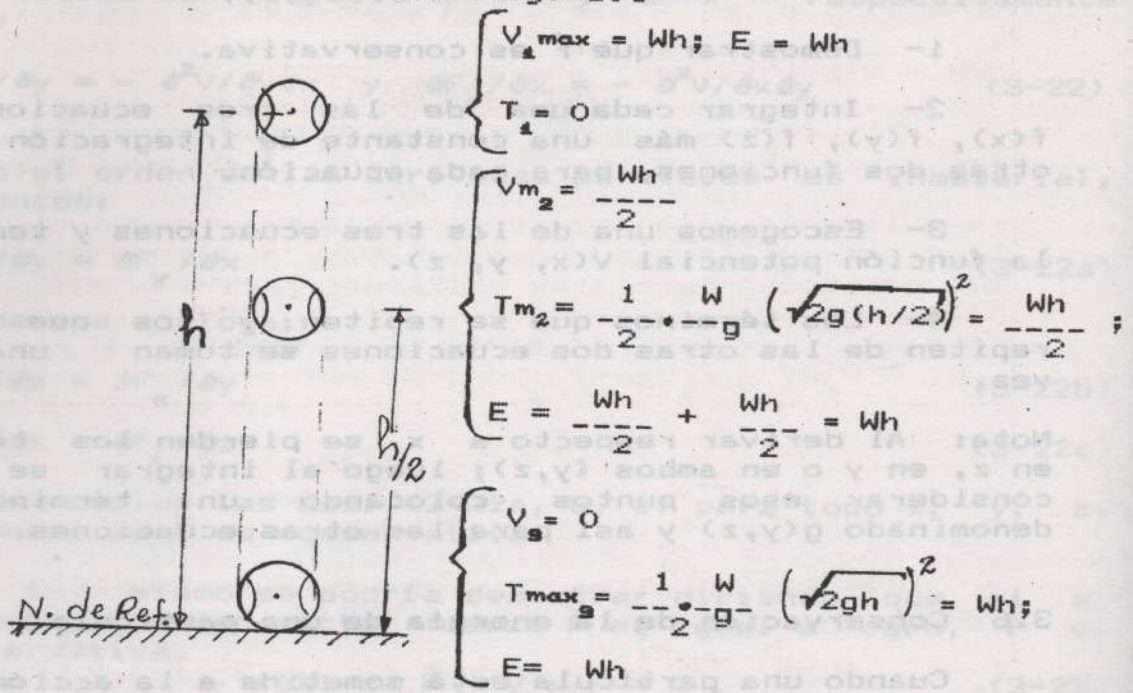
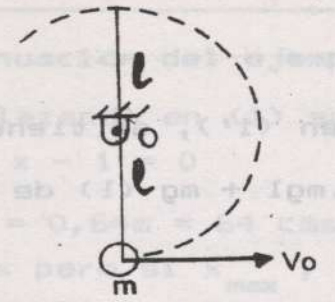
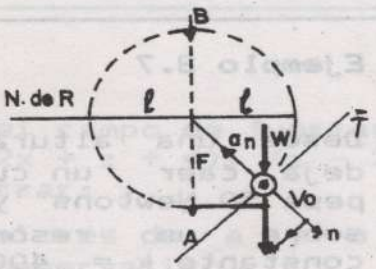


Fig. 3.9 Relaciones de energía cinética y potencial.



Ejemplo 3.6

Se imprime una velocidad inicial v_o hacia la derecha a un péndulo simple de masa m y longitud ℓ en su punto más bajo. Calcule el valor mínimo de v_o necesario para que la masa describa un círculo completo si la masa está conectada al pivote O, a) por medio de una barra rígida de masa despreciable b) mediante una cuerda.



Solución

$v_o = v_A$;

Por conservación de la energía

$$T_A + V_A = T_B + V_B \qquad (1)$$

En donde

$$\tfrac{1}{2}.mv_o^2 - mg(1) = \tfrac{1}{2}.m v_B^2 + mg(\ell) \qquad (1')$$

a) Para una barra rígida en una trayectoria circular se necesita que $v_B \geq 0$. Para un valor mínimo de v_o, entonces $v_B = 0$. Así en (1') quedará:

$$\tfrac{1}{2}.mv_o^2 = 2mg\ell \text{ de donde}$$

$$v_o = 2\sqrt{g\ell}$$

b) Para una cuerda en una trayectoria circular se necesita que $F \geq 0$ en la posición B.

En B: $\sum F_n = ma_n$

$$F + W = m\cdot\frac{v_B^2}{\ell} \text{ cuando } F = 0, \text{ entonces}$$

continuación ejemplo 3.6

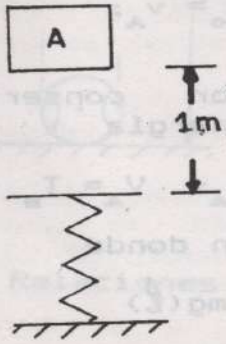
$$1\ mg = mv_B^2$$

$v_B^2 = lg$ Reemplazando en (1'), se tiene:

$$\tfrac{1}{2}.mv_o^2 - mg(1) = \tfrac{1}{2}.mgl + mg\ (1) \text{ de donde}$$

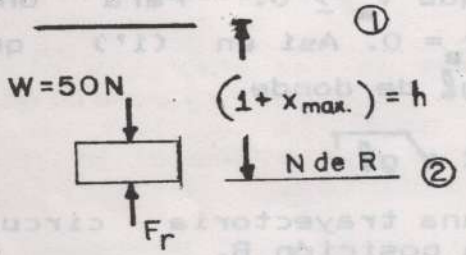
$$v_o^2 = gl + 4.gl = 5.gl$$

$$v_o = \sqrt{5gl}$$



Ejemplo 3.7

Desde una altura de 1m se deja caer un cuerpo A que pesa 50 Newtons y desciende sobre un resorte cuya constante k = 400 New/m. Determine la deformación máxima y la fuerza máxima de compre sión en el resorte.



Solución

Por conservación de la energía: $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

(1) pero para $v_1 = 0$ $T_1 = 0$

$V_1 = Wh = 50(1 + x_{max})$

Para x_{max}, se tiene $v_2 = 0$

así: $T_2 = 0$

$$V_2 = (V_g)_2 + (V_e)_2 = 0 + \tfrac{1}{2}.kx_{max}^2$$

continuación del ejemplo 3.7

reemplazando en (1) se tiene:

$4x^2 - x - 1 = 0$

$x_{max} = 0,64m = 64$ cms. (c)

$F = kx$ pero si x_{max}, se tiene F_{max}, por lo tanto

$F_{max} = 400\ (0,64) = 256$ New.

Ejemplo 3.8

Dado el campo de fuerzas
$F = [(2x + z + 4);\ (z - 2y);\ (ax + by)]$Nw .
Encontrar:

a) Valores de a y b para que el campo sea conservativo.

b) La función potencial.

c) El trabajo realizado por el campo cuando una partícula se mueve desde el punto A(0;0;0)m hasta el punto B(2;2;2)m.

Solución

Si el rotacional $\bar{V} \times \bar{F} = 0$, la fuerza es conservativa

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Fx & Fy & Fz \end{vmatrix} = [(b-1);(1-a);(0-0)] = \bar{0}$$

a) **a=1; b=1** y $\bar{F} = [2x+z+4);\ (z-2y);\ (x+y)]$ Newton

continuación del ejemplo 3.8

b) $\partial V/\partial x = -(2x+z+4)$; $\partial V/\partial y = -(z-2y)$; $\partial V/\partial z = -(x+y)$

$V(x,y,z) = -(x^2 + zx + 4x) + f(y,z)$ (1)

$V(x,y,z) = -(zy + y^2) + g(x,z)$ (2)

$V(x,y,z) = -(xz + yz) + h(x,y)$ (3)

Completando la Ec. (1) se tiene:

$V(x,y,z) = -(x^2 + zx + 4x + zy - y^2) + c$

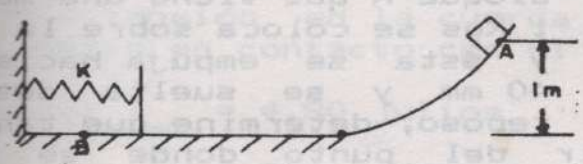
c) $U_{A \to B} = V_A - V_B = V(x,y,z)_A - V(x,y,z)_B$

$U_{A \to B} = 0 - [-(4 + 4 + 8 + 4 - 4)]$

$U_{A \to B} = 16$ julios

Problemas/secs. (3.4; 3.5; 3.6)

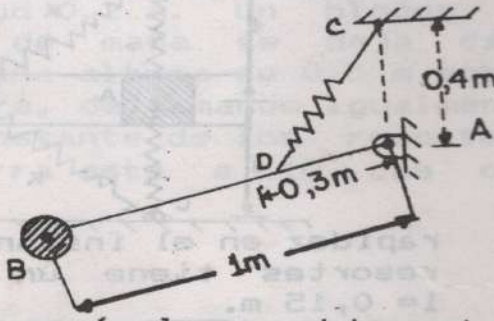
3.20



Un cuerpo de 20 Kgs se desliza a partir del punto A hacia abajo y alcanza el reposo en el punto B, donde se encuentra un resorte cuya constante K= 10 KN/m. Calcule la compresión máxima del resorte, si se desprecia la fricción.

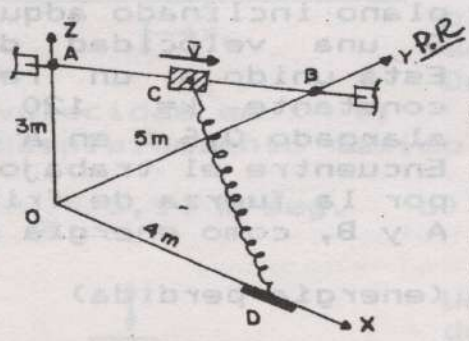
R: $x_{max} = 0,198$ m.

3.21 La esfera de 5 kgs está unida al brazo AB, que puede considerarse rígido y sin masa. El brazo a su vez está acoplado a un resorte de cte K=800 New/m; la fuerza en el resorte es cero cuando la barra está horizontal. Si el sistema parte del reposo en la posición horizontal, cuál será la rapidez de la esfera cuando el brazo esté en posición vertical.



R: $v_2 = 3,63$ m/seg

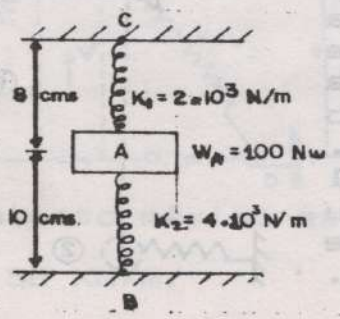
3.22



El collar deslizante de 49 Newtons de peso, lleva ligado un resorte a él y se mueve desde A hasta B a lo largo de la barra fija AB. Si el collar C tiene en A una velocidad de 6 m/seg encontrar la velocidad cuando pase por B si la constante del resorte es k= 40 New/m y tiene una longitud natural de 3 metros.

R: $v_B = 5,86$ m/seg.

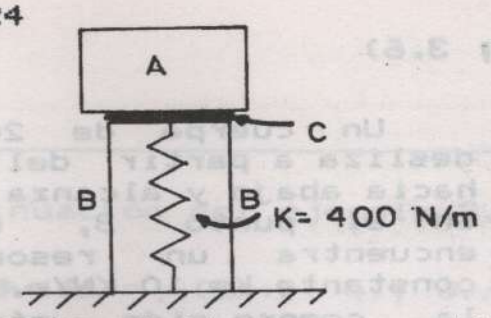
3.23



El bloque A de peso 100 Newtons está inicialmente en reposo y los resortes de constantes $k_1 = 2 \times 10^3$ N/m y $k_2 = 4 \times 10^3$ N/m no están inicialmente deformados. A qué distancia de B se detendrá el bloque A.

R: x = 6,67 cms. del punto B.

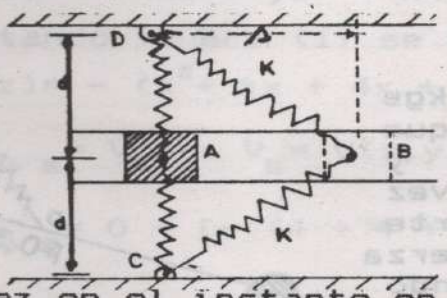
3.24



Cuatro cables elásticos B están unidos a una placa C y sujetan al resorte a una comprensión de 80 mm cuando no actúa ninguna fuerza sobre la placa. Si un bloque A que tiene una masa de 1 Kgs se coloca sobre la placa y ésta se empuja hacia abajo 40 mm y se suelta desde el reposo, determine que tanto se levanta el bloque a partir del punto donde se soltó. Desprecie la masa de la placa.

R: h= 163,27 mm

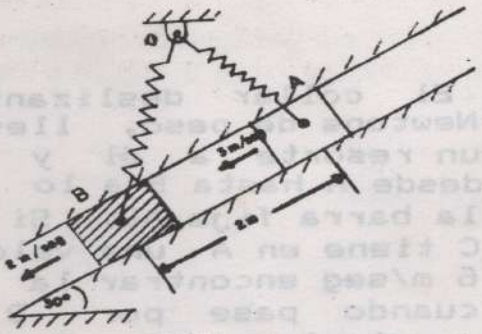
3.25



El bloque A que tiene una masa m_A= 0,6 kgs se desliza en la ranura horizontal lisa, donde d= 0,4 m. Si el bloque se hace retroceder, de modo que s= 0,3 m y se suelta a partir del reposo, determine su rapidez en el instante en que s= 0. Cada uno de los dos resortes tiene un K= 400 N/m y una longitud natural de l= 0,15 m.

R: $v_2 = (4\sqrt{5})$ m/seg= 8,94 m/seg.

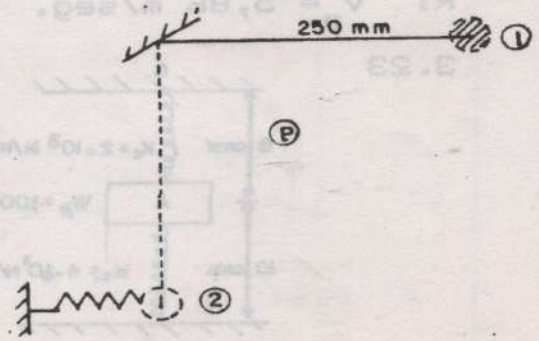
3.26



Un bloque de 4 Kgs de masa tiene una velocidad de 3 m/seg en A y desliza hacia abajo del plano inclinado adquiriendo en B una velocidad de 2m/seg. Está unido a un resorte cuya constante k= 120 New/m y alargado 0,6 m en A y 1 m en B. Encuentre el trabajo efectuado por la fuerza de fricción entre A y B, como energía perdida.

R: $U_{1 \rightarrow 2}$ = - 10,8 julios (energía perdida)

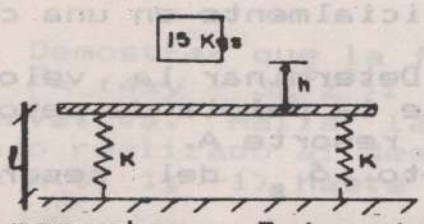
3.27 Un péndulo que tiene una masa de 2 Kgs y una cuerda de longitud 250 mm se suelta del reposo cuando la cuerda está horizontal como se muestra en la figura. Cuando la masa alcanza el punto más bajo de su trayectoria golpea un resorte cuyo módulo es 20 KN/m.



Continuación problema 3.27
Determine:
a) La energía cinética máxima de la masa.
b) La máxima compre sión del resorte.
c) La velocidad en la posición más baja.
d) La tensión en la cuerda en el instante en que la masa entre en contacto con el resorte.

R: a) T_{max} = 4,90 julios b) x_{max} = 22,14 mm
c) v_2 = 2,21 m/seg d) R= 58,80 Newtons

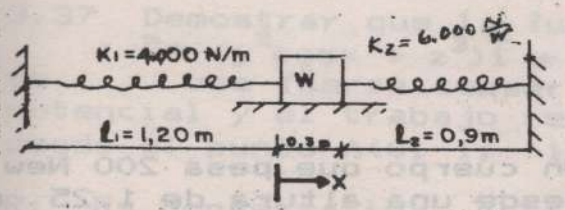
3.28



Una barra rígida de masa despreciable está sostenida por dos resortes idénticos de longitud 0,2 m. Un bloque de 15 Kgs de masa se deja caer desde una altura de 0,5 m sobre la barra, deformando igualmente a los resortes. Determine la constante de los resortes, si la posición más baja de la barra está a 10 cms del piso.

R: k= 8,82 KN/m

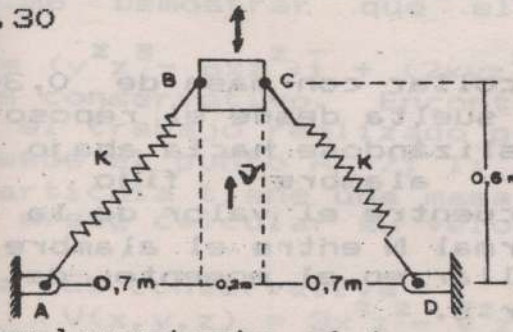
3.29



Un bloque de 250 Newtons de peso se desliza horizontalmente a la derecha siendo despreciable la fricción. Los resortes están indeformados en la posición mostrada. El bloque se desplaza x= 0,3 m y se suelta del reposo. Determine:
a) La velocidad en x= 0;
b) Su desplazamiento máximo a la izquierda.

R: a) v_2 = 5,94 m/seg. b) x_{max} = 0,30 m = 30 cms.

3.30



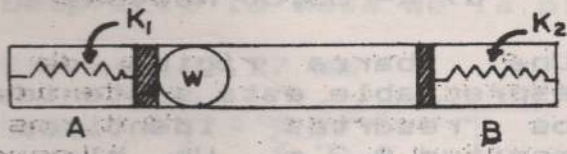
Un bloque de 10 Kgs de masa se desliza sobre una superficie horizontal, siendo despreciable la fricción. Los resortes no le aplican fuerza al bloque cuando A, B, C y D están alineados. En ese instante la velocidad del bloque es 5 m/seg. Determine la constante k de cada resorte si el desplazamiento máximo es 0,6 m. sobre la superficie

R: k= 2,58 KN/m.

3.31 Un automóvil que pesa 20 KN. viaja sobre una carretera a nivel a una velocidad de 30 m/seg. El auto desliza cuando se aplican los frenos repentinamente. Qué espacio recorrerá el auto antes de pararse, si μ= 0,5 entre cauchos y pavimento.

R: x= 91,84 metros.

3.32



El resorte A, que tiene una constante k_1 se comprime inicialmente en una cantidad δ_1

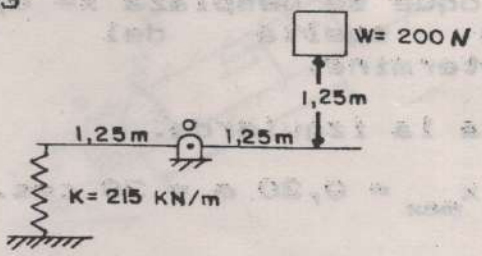
a) Determinar la velocidad con que la pelota de peso W dejará el resorte A.

b) Encontrar el acortamiento δ_2 del resorte B, de constante k_2, cuando la pelota es parada por dicho resorte.

R: a) $v = \delta_1 \sqrt{k_1 g / W}$

b) $\delta_2 = \delta_1 \sqrt{k_1 / k_2}$

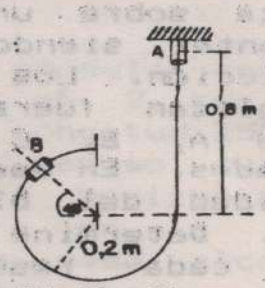
3.33



Un cuerpo que pesa 200 New cae desde una altura de 1,25 m en el extremo de una viga rígida. Inicialmente el resorte tiene su longitud natural y se desprecia la masa de la viga. Si no hay pérdida de energía, determine la deformación máxima del resorte.

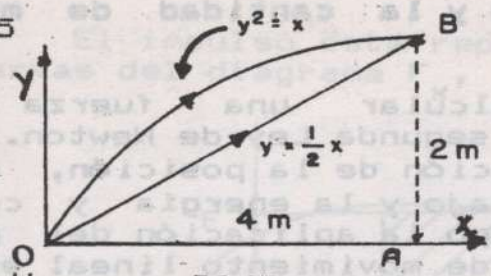
R: δ= 49,16 mm

3.34



Un collar con masa de 0,30 Kgs se suelta desde el reposo en A, deslizándose hacía abajo sobre un alambre fijo liso. Encuentre el valor de la fuerza normal N entre el alambre y el collar en el momento de pasar por B.

R: N= 17,29 Newtons

3.35 

Demuestre que la fuerza $\bar{F} = (x^2\bar{i} + xy\bar{j})$New, es no conservativa y calcule el trabajo hecho por $\bar{F}$ en su movimiento de O a B a lo largo de la línea recta, y de la parábola $y^2 = x$

R: $U_{O \rightarrow B} = 80/3$.julios .(Recta OB)

$U_{O \rightarrow B} = 76/3$.julios .(Parábola OB)

3.36 Demostrar que la fuerza $\bar{F} = (4xy - 3x^2z^2)\bar{i} + 2x^2\bar{j} - 2x^3z\bar{k}$ es una fuerza conservativa. Hallar la función energía potencial y el trabajo realizado al desplazar un cuerpo desde el punto A(0; 1; -1) hasta el punto B(-1; 0; 1).

R: Es conservativa

$V(x,y,z) = (-2x^2y + x^3z^2) + c$

$U_{A \rightarrow B} = 1$ julio

3.37 Demostrar que la fuerza $\bar{F} = (y^2\cos x + z^3)\bar{i} + (2y \operatorname{sen} x - 4)\bar{j} + (3xz^2 + 2)\bar{k}$ es una fuerza conservativa. Encontrar la función potencial y el trabajo realizado al desplazar un cuerpo desde el punto A(0; 1; -1) hasta el punto B(π/ 2; -1; 2).

R: Es conservativa

$V(x,y,z) = -\left[y^2 \operatorname{sen} x + xz^3 - 4y + 2z\right] + c$

$U_{A \rightarrow B} = (15 + 4\pi)$ julios

3.38 Demostrar que el campo de fuerza definido por

$\bar{F} = (y^2z^3 - 6xz^2)\bar{i} + (2xyz^3)\bar{j} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\bar{k}$

es conservativo. Encontrar la función energía potencial y el trabajo realizado por $\bar{F}$ para mover una partícula desde el punto A(-2; 1; 3) hasta B(1; -2; -1). Si esta partícula tiene una masa de 3 Kgs y su velocidad en A es 6 m/seg calcular su velocidad en B.

R: Es conservativa

$V(x,y,z) = 3x^2z^2 - y^2z^3x + c$

$U_{A \rightarrow B} = 155$ julios ; $v_B = 11,80$ m/seg

3.7 Principio del impulso y la cantidad de movimiento lineal

Cuando se vá a calcular una fuerza o una aceleración, se aplica la segunda Ley de Newton. Cuando la fuerza está dada en función de la posición, es mejor aplicar el método del trabajo y la energía y cuando la fuerza es función del tiempo la aplicación del principio del impulso y la cantidad de movimiento lineal es lo más aconsejable.

Al resolver la ecuación fundamental $\left[\left(\bar{F}=\frac{d(m\bar{v})}{dt}\right)\right]$ se puede realizar una primera integración si se conoce la fuerza en función del tiempo y m es constante, de esta forma:

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{F}dt = \int_{v_1}^{v_2} md\bar{v} = m\bar{v}_2 - mv_1 = \Delta\bar{L} \qquad (3\text{-}28)$$

La integral $\int_{t_1}^{t_2} \bar{F}dt = \bar{I}_L$ se llama impulso lineal; $m\bar{v} = \bar{L}$, cantidad de movimiento lineal de la partícula y por consiguiente la Ec. (3-28) nos dice que el impulso lineal sobre m es igual al cambio de la cantidad de movimiento lineal de la partícula.

La Ec. (3-28) puede escribirse en la forma

$$m\bar{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}dt = m\bar{v}_2 \qquad (3\text{-}28a)$$

y utilizando componentes rectangulares sería:

$$\left.\begin{aligned} \Delta L_x &= m(v_x)_2 - m(v_x)_1 = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt \\ \Delta L_y &= m(v_y)_2 - m(v_y)_1 = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt \\ \Delta L_z &= m(v_z)_2 - m(v_z)_1 = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}28b)$$

El impulso está representado por el área bajo las curvas del diagrama F_x, F_y, F_z contra t. Fig. 3.10

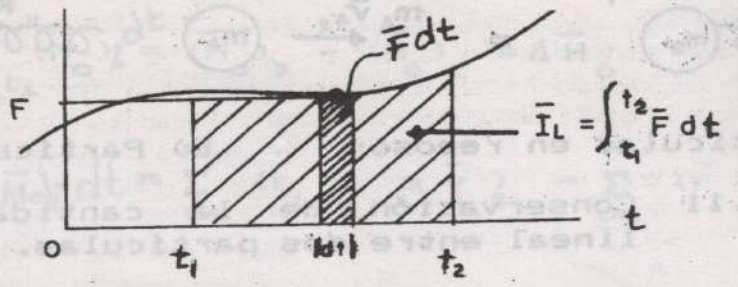


Fig. 3.10 Diagrama del impulso lineal de una partícula.

Las unidades del impulso son las mismas que las de la cantidad de movimiento lineal.
En S. I. [New * seg] = Kgs.m/seg.

Si sobre una partícula actúa más de una fuerza (sistema) se tendrá

$$\sum \bar{I}_{L_{1 \to 2}} = m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 \qquad (3\text{-}29)$$

Si se tiene un sistema de n partículas se escribirá:

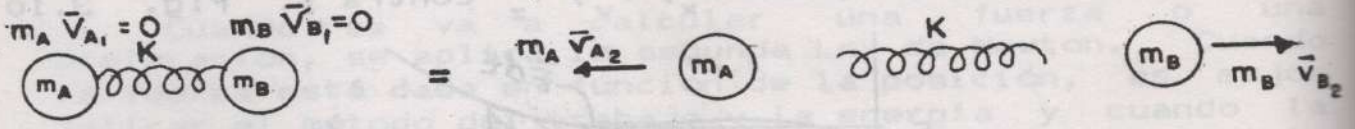
$$\sum_{i=1}^{n} (m_i \bar{v}_i)_1 + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_i\,dt = \sum_{i=1}^{n} (m_i v_i)_2 \qquad (3\text{-}30)$$

La $\sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}dt$ representa el impulso de las fuerzas externas sobre las partículas más las fuerzas de interacción entre las mismas. Como la suma de las fuerzas internas es igual a cero y si la resultante de las fuerzas externas es igual a cero, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} (m_i \bar{v}_i)_1 = \sum_{i=1}^{n} (m_i \bar{v}_i)_2 \qquad (3\text{-}31)$$

Lo que indica que se conserva la cantidad de movimiento lineal total de las partículas.

Sean por ejemplo dos partículas de masas m_A y m_B inicialmente en reposo, unidas por un resorte comprimido Fig. 3.11a.



a) Partículas en reposo b) Partículas en movimiento

Fig. 3.11 Conservación de la cantidad de movimiento lineal entre dos partículas.

El resorte se suelta y las partículas se separan en la misma dirección y sentido contrarios. Entonces

$$m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_B(v_B)_2 - m_A(v_A)_2 \quad \text{y}$$

$$m_A(v_A)_2 = m_B(v_B)_2 \; ; \quad m_A/m_B = \frac{(v_B)_2}{(v_A)_2}$$

Las partículas A y B se separan con velocidades inversamente proporcionales a sus masas. Las únicas fuerzas externas que actúan son el peso W de ellas que se equilibra con sus respectivas normales.

3.7.1 Movimiento de impulsión

Es el que resulta de la aplicación de grandes fuerzas sobre una partícula durante intervalos de tiempo cortos, debido a un impacto súbito. Esta fuerza se llama impulsiva y debido a ella la Ec. (3-29) se transforma en:

$$m\bar{v}_1 + \sum \bar{F}\,(\Delta t) = m\bar{v}_2 \qquad (3\text{-}32)$$

Cualquier fuerza no impulsiva puede despreciarse. Son ejemplos de éstas fuerzas, el peso del cuerpo, la fuerza del resorte o cualquier fuerza *pequeña comparada* con la fuerza impulsiva.

3.8 Principio del impulso y la cantidad de movimiento angular

Con un procedimiento similar al ya descrito se puede obtener el impulso angular y la cantidad de movimiento angular.

Integrando la Ec. (2-39) ($\bar{\Sigma}\bar{M}_o = \dot{\bar{H}}_o$) con respecto al tiempo se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} (\bar{M}_o)_i dt = (\bar{H}_o)_2 - (\bar{H}_o)_1 = \Delta \bar{H}_o \qquad (3\text{-}33)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} (\bar{M}_o)_i dt = \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i)_2 - \sum_{i=1}^{n} (\bar{r} \times m_i v_i)_1 \qquad (3\text{-}33a)$$

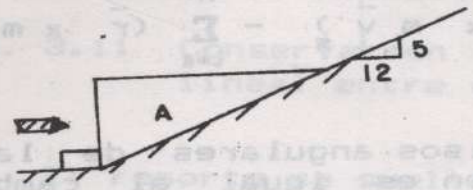
donde la suma de los impulsos angulares de las fuerzas externas respecto al origen es igual al cambio de la cantidad de movimiento angular.

Si no existen fuerzas externas actuando sobre el sistema de partículas $\sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} (\bar{M}_o)_i dt = 0$; la Ec. (3-33) se convierte en:

$$(\bar{H}_o)_1 = (\bar{H}_o)_2 = (\bar{H}_o) = \text{constante} \qquad (3\text{-}34)$$

que es el principio de conservación de la cantidad de movimiento angular respecto al origen.

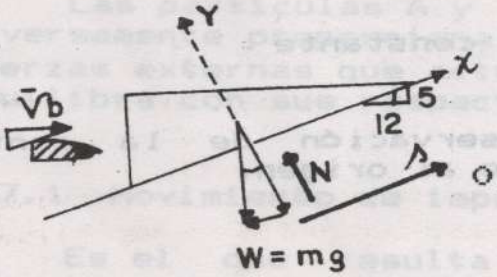
Ejemplo 3.9



El cuerpo A de masa 12 Kgs reposa sobre un plano inclinado liso. Una bala de 50 gramos disparada horizontalmente con una velocidad de 400 m/seg se introduce en el cuerpo. Calcule la distancia que el cuerpo recorre sobre el plano inclinado.

Solución

Por conservación de la cantidad de movimiento lineal se tiene:



$$\Sigma (m_i v_{i1}) = \Sigma (m_i v_{i2}) \quad \text{entonces}$$

$$+\nearrow^{X} \quad m_b v_b + m_c v_c = (m_b + m_c) v_2$$

$$0{,}05(400).12/13 + 0 = (0{,}05 + 12) v_2$$

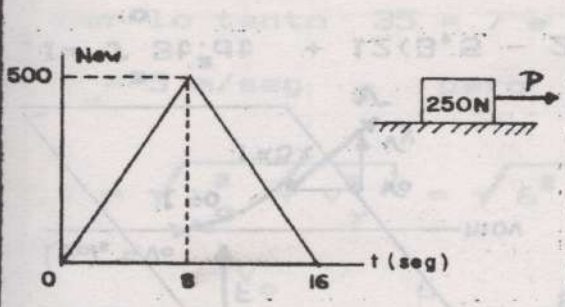
$$v_2 = 1{,}53 \text{ m/seg}$$

$$U_{1 \to 2} = T_2 - T_1 \quad \text{por lo tanto}$$

$$-(12{,}05 * 9{,}8)5/13 . (s) = 1/2(12{,}05)\ (0 - 1{,}53^2)$$

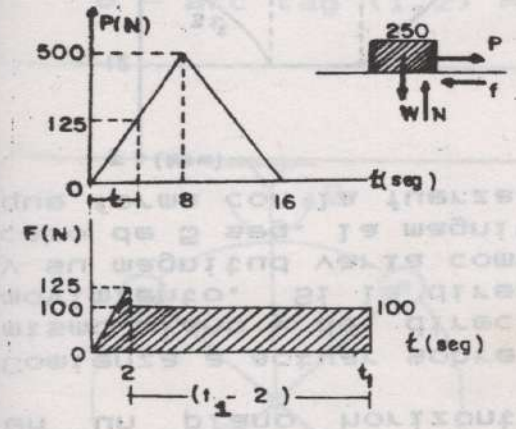
$$s = 0{,}3117 \text{ m} = 31{,}17 \text{ cms}$$

Ejemplo 3.10



Sobre un bloque 250 Newton de peso; inicialmente en reposo actúa una fuerza P que varía como se indica. Si los coeficientes de fricción entre bloque y superficie son $\mu_e = 0,50$ y $\mu_d = 0,40$ determine el tiempo en que el bloque:

a) comenzará a moverse
b) dejará de moverse



Solución

a) Para la fricción estática

$f_e = \mu_e N = \mu_e W = 0,5 \cdot 250$

$f_e = 125$ N

Para movimiento inminente $P = f_e = 125$ N y por proporción de triángulos en la gráfica se tiene:

$$\frac{125}{500} = \frac{t}{8} \quad \text{de donde}$$

$$t = \frac{125 \cdot 8}{500} = 2 \text{ seg}$$

El bloque comenzará a moverse en t= 2 seg.

b) Para t>2 seg la fuerza de fricción es

$f_d = \mu_d N = \mu_d W = 0,4 \cdot 250 = 100$ New

para t_1 y $v = 0$ el bloque deja de moverse.

Por la Ec. $mv_1 + \int_0^{t_1} P\,dt - \int_0^{t_1} f\,dt = mv_2$ se tiene:

Continuación del ejemplo 3.10

$$0 + \int_0^{t_1} P\,dt = \int_0^{t_1} f\,dt + 0$$

De los diagramas anteriores se tiene:

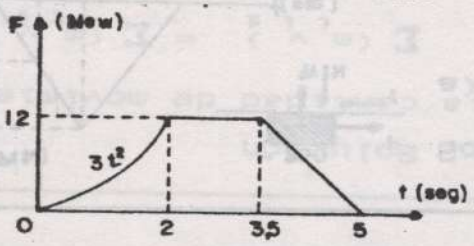
$$1/2 \left(500 \times 16 \right) = 1/2 \left(125 \times 2 \right) + 100 \, (t_1 - 2)$$

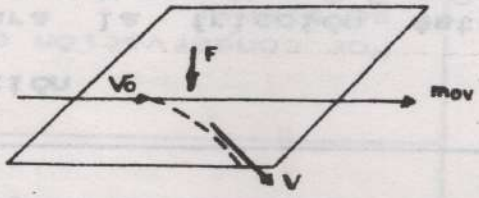
de aquí $t_1 = 40{,}75$ seg

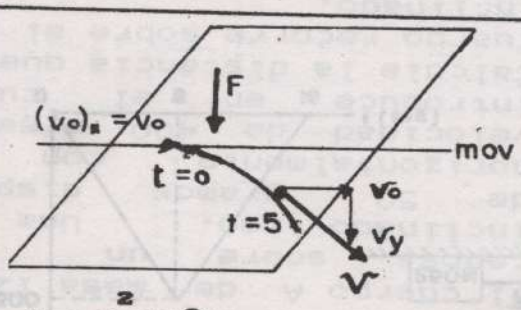
Ejemplo 3.11

Un cuerpo de masa 7 Kgs está moviéndose en línea recta en un plano horizontal con rapidez $v_o = 6$ m/seg.

Comienza a actuar sobre él una fuerza situada en el mismo plano y de dirección perpendicular a la del movimiento. Si la dirección de la fuerza es constante y su magnitud varía como indica la figura, hállese al cabo de 5 seg. la magnitud de la velocidad y el ángulo que forma con la fuerza.







Solución

Para $t = 2$ seg; $F = 3(2)^4 = 12N$

En la dirección de $\bar{F}$

impulso $= mv_2 - mv_1$ pero

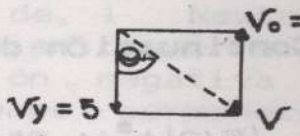
$$I = \int_0^2 3t^2 dt + 12(3{,}5 - 2) + 1/2 \cdot 12(5 - 3{,}5)$$

Continuación del ejemplo 3.11

$I = 8 + 18 + 9 = 35$ N • seg

por lo tanto $35 = 7 \bullet v_y + 7(0)$

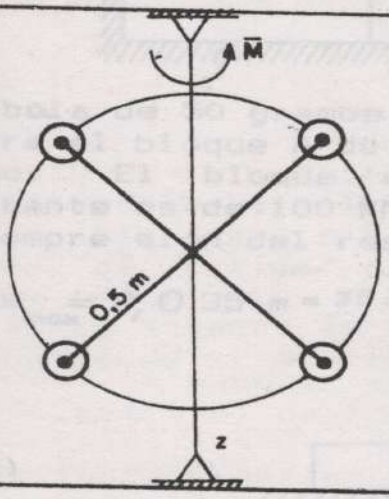
$\bar{v}_y = 5$ m/seg ↓ pero



$$v = \sqrt{v_o^2 + v_y^2} = \sqrt{6^2 + 5^2} = 7{,}81 \text{ m/seg}$$

$$tg\theta = \frac{v_o}{v_y} = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

$\theta = \text{arc tag } (1{,}2) = 50{,}19°$



Ejemplo 3.12

Cada una de las cuatro esferas tiene una masa de 2 Kgs y están rígidamente unidas a una estructura de barras cruzadas de masa despreciable. Si se aplica un par $M = (5t + 2)$ New x m; determine la rapidez de cada una de las esferas en 4 seg partiendo del reposo.

Solución

Aplicando el principio del impulso y la cantidad de movimiento angular se tiene:

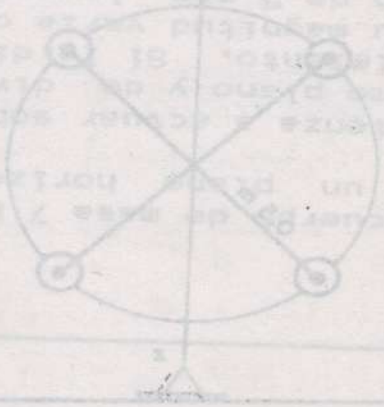
$$(H_z)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} M_z dt = (H_z)_2$$

$$0 + \int_0^4 (5t + 2)\, dt = 4 \bullet 2(0{,}5)v_2$$

Continuación del ejemplo 3.12

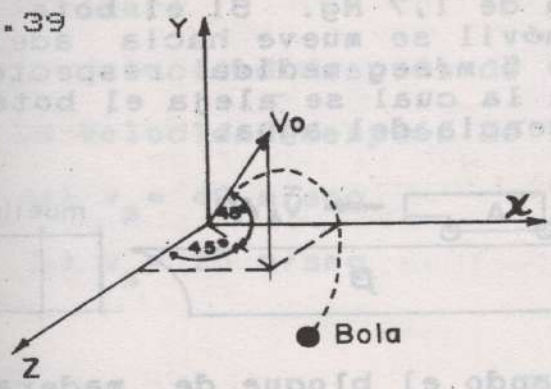
$$(5/2)\,t^2 + 2t\Big]_0^4 = 4v_2$$

$$(5/2)(4)^2 + 2 \cdot 4 = 4v_2 \; ; \qquad v_2 = 12 \text{ m/seg}$$



Problemas/secs (3.7; 3.8)

3.39

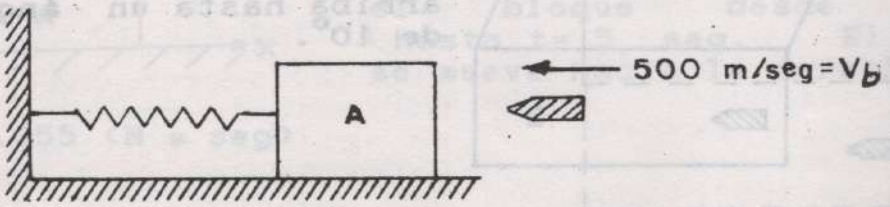


Se lanza una bola de 0,5 Kgs de masa con v_o = 10 m/seg. La bola está sujeta a una fuerza constante de 1 Newton que ejerce un viento que sopla en la dirección negativa de x. ¿Cuánto tiempo permanecerá la bola paralela al plano y . z? Calcule la velocidad de la bola al final de dicho tiempo?

R: t = 2,5 seg

$\bar{v}$ = [0 ; − 17, 43; 5] m/seg

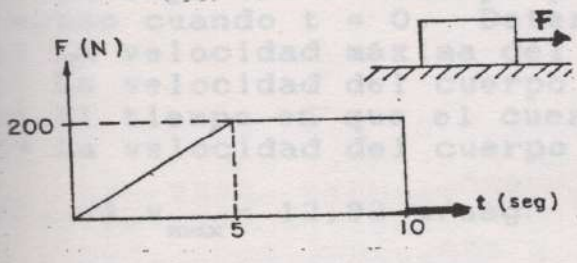
3.40



Una bala de 50 gramos que se mueve a 500 m/seg, choca contra el bloque A de 5 Kgs de masa y se incrusta en el mismo. El bloque es detenido por el resorte cuya constante es de 100 KN/m. Encuentre la distancia máxima de compresión del resorte.

R: $x_{max} = 0,035$ m = 35 mm.

3.41



Un cuerpo de masa 20 Kgs está en reposo, sobre una superficie horizontal, siendo μ_e = 0,6. Si una fuerza horizontal $\bar{F}$ es aplicada al cuerpo, de manera que varía con el tiempo como en la figura, determine el tiempo en que comienza el movimiento y su velocidad al cabo de 10 seg.

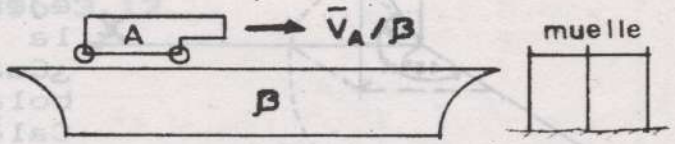
R: t = 2,94 seg

v_2 = 24,84 m/seg

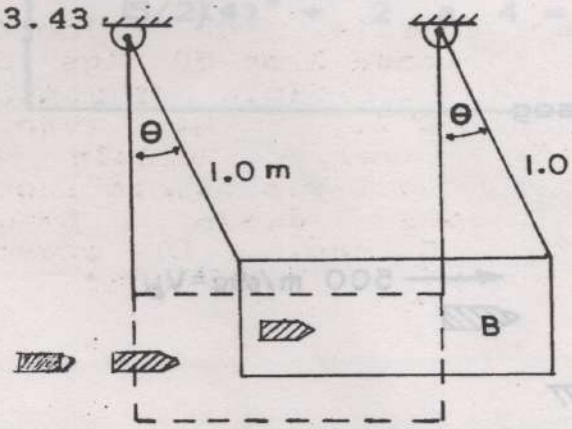
3.42 Un bote tiene una masa de 20 Mg y soporta un automóvil que tiene una masa de 1,7 Mg. Si el bote está unido a un muelle y el automóvil se mueve hacia adelante con una rapidez constante de 5 m/seg medida respecto al bote, determine la rapidez a la cual se aleja el bote del muelle. Desprecie la resistencia del agua.

R: $\bar{v}_A = 4{,}61$ m/seg →

$\bar{v}_B = 0{,}392$ m/seg ←



3.43



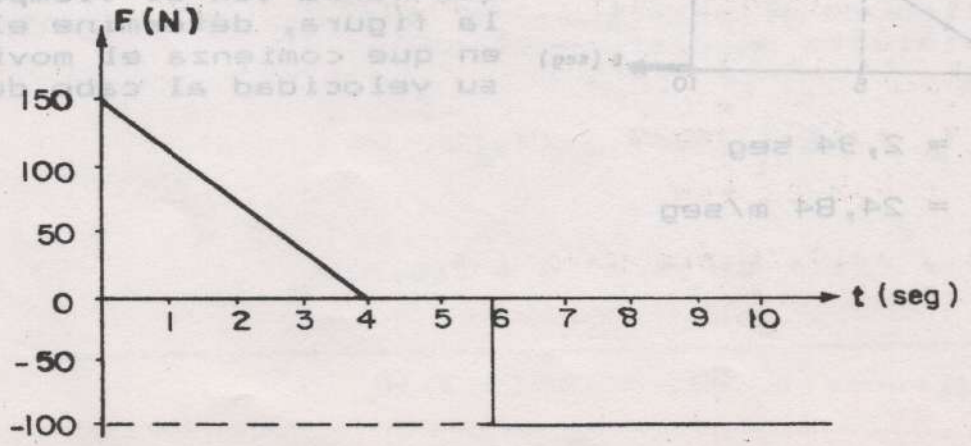
Cuando el bloque de madera de masa 4 Kgs está en reposo, $\theta = 0^o$, una bala de 2 gramos choca y se encaja dentro de él. Encuentre la rapidez inicial de la bala si el bloque se mece hacía arriba hasta un ángulo máximo de 10^o.

R: $v_b = 1.100{,}55$ m/seg.

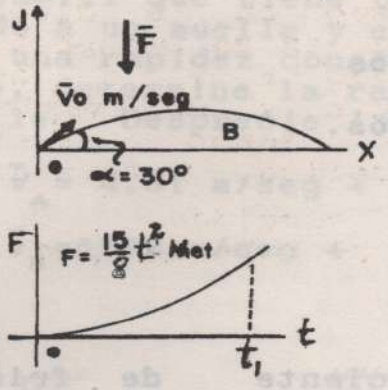
3.44 Una pequeña bala de masa m y dimensiones despreciables se dispara con un rifle en dirección normal a una tabla. La bala sale del rifle con una velocidad inicial de 800 m/seg, choca con la tabla y la atraviesa en 2×10^{-4} seg. Si la bala sale de la tabla con una velocidad de 700 m/seg, determine el espesor de la tabla. Se supone que la fuerza de oposición a la penetración es constante.

R: e = 0,15 m

3.45



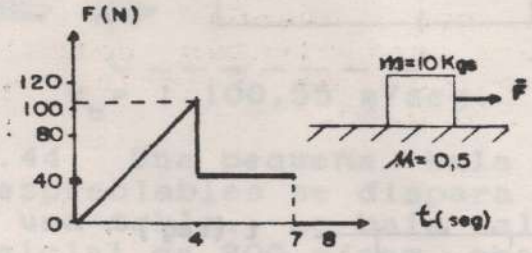
3.48



Una partícula de masa m = 0,5 Kgs, que está apoyada en un plano horizontal parte del origen con rapidez v= 10 m/seg en la dirección indicada. Si sobre ella actúa una fuerza $\bar{F} = -Fj$, cuya magnitud está dada por el gráfico, calcular el tiempo necesario para que la partícula alcance la velocidad $v = [v_x ; -5]$ m/seg.

R: t = 2 seg.

3.49

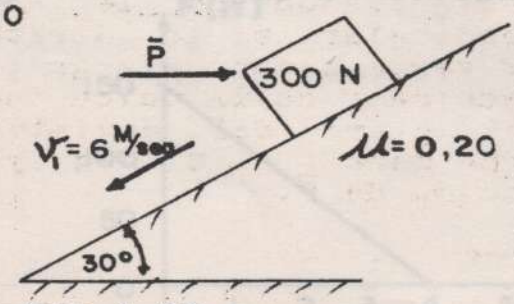


Un bloque de 10 Kgs de masa reposa sobre una superficie horizontal cuando la fuerza F es aplicada durante 7 segundos. La variación de F con el tiempo se muestra en la figura. Calcule la máxima velocidad requerida poy el bloque y el tiempo total que está en movimiento. Los coeficientes de fricción estática y dinámica son iguales a 0,50.

R: Vmax = 5,20 m/seg

t = 5,55 seg

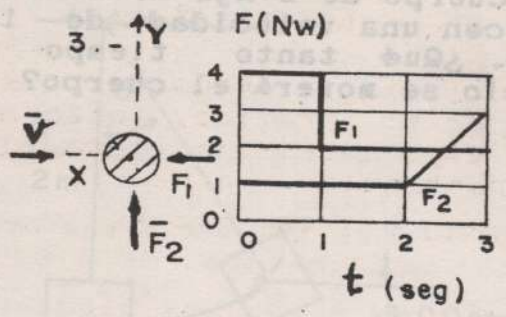
3.50



Un cuerpo cuyo peso es 300 Newton se desliza hacia abajo del plano inclinado con una velocidad de 6 m/seg cuando la fuerza horizontal P = 200 New es aplicada al cuerpo ¿Cuánto tiempo después de aplicada P el cuerpo se detiene ?

R: t = 1,93 seg

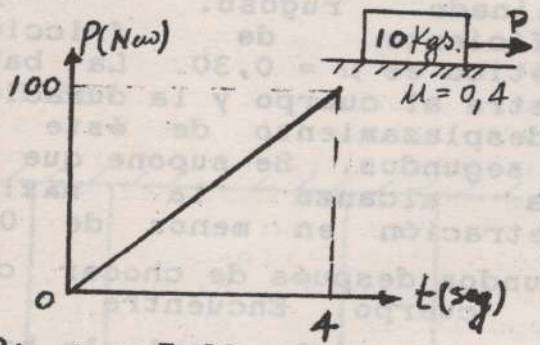
3.51



Una partícula cuya masa es de 0,5 Kgs tiene una velocidad v = 10 m/seg en la dirección del eje x en un tiempo t = 0. Las fuerzas F_1 y F_2 actúan sobre la partícula y su variación respecto al tiempo se muestran en la gráfica. Determine el vector velocidad de la partícula al cabo de 3 segundos.

R: $\bar{v}$ = [- 6 ; 8] m/seg.

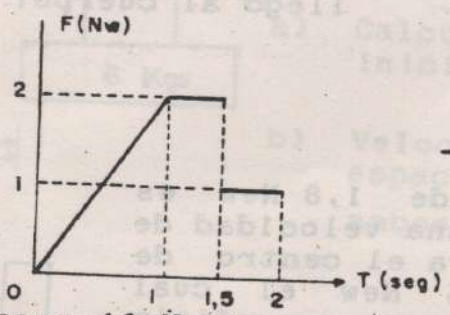
3.52



La fuerza $\bar{P}$ que varía linealmentecon el tiempo, como se muestra en la figura, es aplicada a un bloque de 10 Kgs de masa, inicialmente en reposo. Determine la velocidad del bloque cuando t = 4 seg. Los coeficientes estático y cinético de fricción son iguales a 0,40.

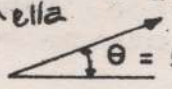
R: v = 7,39 m/seg

3.53

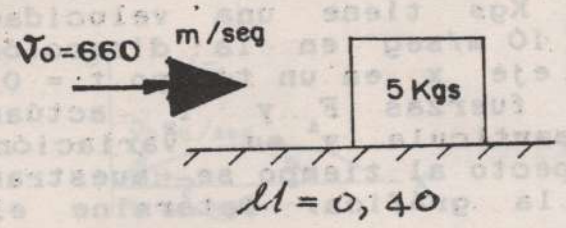


Un cuerpo de peso 10 Newton se mueve según una línea recta con una velocidad de 3 m/seg cuando se le aplica una fuerza horizontal $\bar{F}$ perpendicular a la dirección inicial de movimiento. Si la F varía según el gráfico, permaneciendo constante en dirección y es la única fuerza que actúa sobre el cuerpo en el plano del movimiento, encuentre la velocidad del cuerpo para t = 2 seg y el ángulo θ que forma con la dirección de $\bar{F}$.

R: $\bar{v}$ = 3,87 m/seg

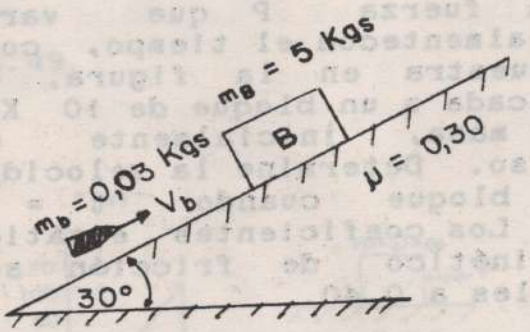


3.54 Un proyectil de 30 gramos de masa que se mueve a una velocidad de 660 m/seg, penetra a un cuerpo de 5 Kgs de masa y sale con una velocidad de 180 m/seg. ¿Qué tanto tiempo y espacio se moverá el cuerpo?



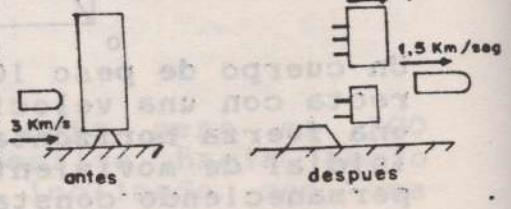
R: t = 0,73 seg
x = 1,06 m

3.55 Una bala cuya masa es de 30 gramos se dispara contra un cuerpo de masa 5 Kgs que está en reposo sobre un plano inclinado rugoso. El coeficiente de fricción cinético es $\mu = 0,30$. La bala penetra al cuerpo y la duración de desplazamiento de éste es 0,4 segundos. Se supone que la bala alcanza la máxima penetración en menos de 0,4 segundos después de chocar con el cuerpo. Encuentre la rapidez con la cual la bala llegó al cuerpo?



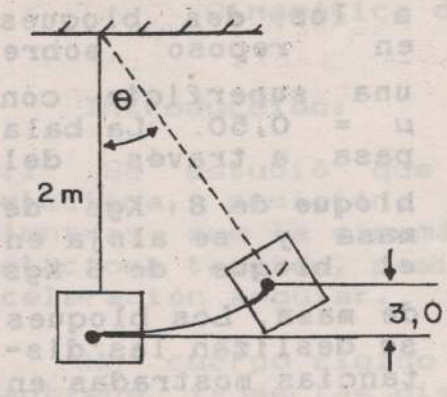
R: v = 496,53 m/seg.

3.56 El proyectil de 1,8 New es disparado con una velocidad de 3 Kms/seg contra el centro de un disco de 9,6 New el cual reposa sobre una superficie lisa. Si el proyectil atraviesa el disco y emerge con una velocidad de 1,5 Kms/seg. Hallar la velocidad v' del disco inmediatamente después de que el proyectil lo haya atravesado.



R: v'= 281,25 m/seg

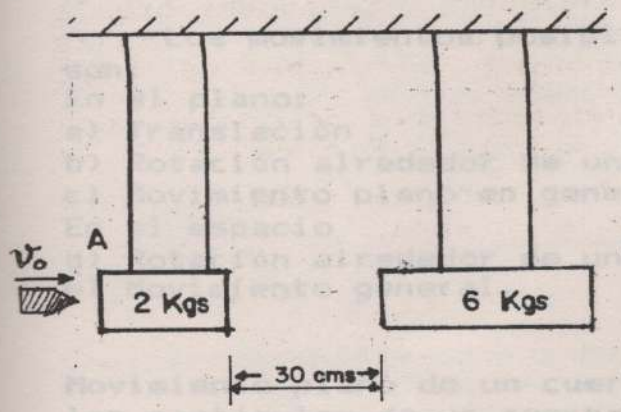
3.57



Se dispara horizontalmente una bala de peso 0,6 Newtons contra un saco de arena de peso 500 New suspendido de una cuerda de 2 m de logitud. Se calcula midiendo el ángulo θ, que el saco con la bala incrustada, oscila hasta una altura de 3 cms. ¿Cuál es la velocidad de la bala al penetrar en el saco?

R: $v_b = 642,44$ m/seg

3.58



Se dispara una bala de masa 20 gramos en dirección horizontal hacia el bloque A y se introduce en el bloque B. La bala comunica a los bloques A y B velocidades de 2 y 1 m/seg respectivamente.

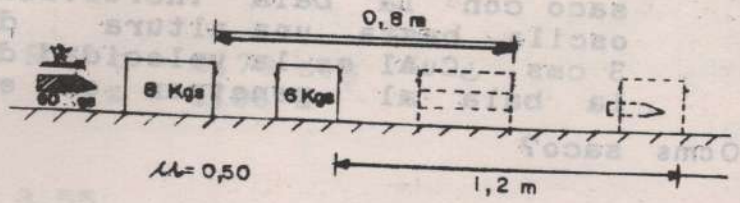
a) Calcular la velocidad inicial v_o de la bala

b) Velocidad de la bala en el espacio comprendido entre ambos bloques (A y B).

R: a) $\bar{v}_o = 501$ m/seg →

b) $\bar{v}_{A\ y\ B} = 301$ m/seg →

3.59



La bala de 60 gramos de masa es disparada a los dos bloques en reposo sobre una superficie con $\mu = 0,50$. La bala pasa a través del bloque de 8 Kgs de masa y se aloja en el bloque de 6 Kgs de masa. Los bloques se deslizan las distancias mostradas en la figura. Encuentre la velocidad inicial de la bala.

R: v = 719,83 m/seg.

Capitulo 4

Cinemática de los cuerpos rígidos.

Introducción:

4.1 Se estudió que la cinemática de una particula relaciona, posición, tiempo, velocidad y aceleración, mientras que la cinemática de un sistema de particulas relaciona también, posición, tiempo, velocidad angular y aceleración angular.

Un cuerpo rígido es un sistema de particulas, que mantiene fijas las distancias que las separan, bajo la aplicación de una fuerza o momento. No hay movimiento angular y $w = \alpha = 0$.

Ejemplo: Dos particulas unidas por una barra de acero (aunque haya una pequeña deformación de la barra) forman un cuerpo rígido, mientras que sí estan unidas por un resorte, no forman un cuerpo rígido (no conservan sus distancias iniciales).

Los movimientos posibles de un cuerpo rígido (C.R.) son:
En el plano:
a) Translación
b) Rotación alrededor de una recta fija.
c) Movimiento plano en general.
En el espacio
d) Rotación alrededor de un punto fijo.
e) Movimiento general.

Movimiento plano de un cuerpo rígido. Cuando cada una de las partículas de un cuerpo rígido se mueve a lo largo de una trayectoria paralela a un plano fijo, el movimiento del cuerpo es plano. Ejemplos: casos a,b y c de movimiento de C.R.

4.2 **Translación de un cuerpo rígido:** Este movimiento de translación ocurre cuando todas las partículas describen trayectorias paralelas, de modo que las lineas que unen dos puntos cualesquiera del cuerpo permanecen siempre paralelas a su posición inicial.

En translación rectilínea las trayectorias de las partículas del cuerpo son líneas rectas, Fig. 4.1a. En translación curvilínea las trayectorias de las partículas del cuerpo son lineas curvas. Fig. 4.1b.

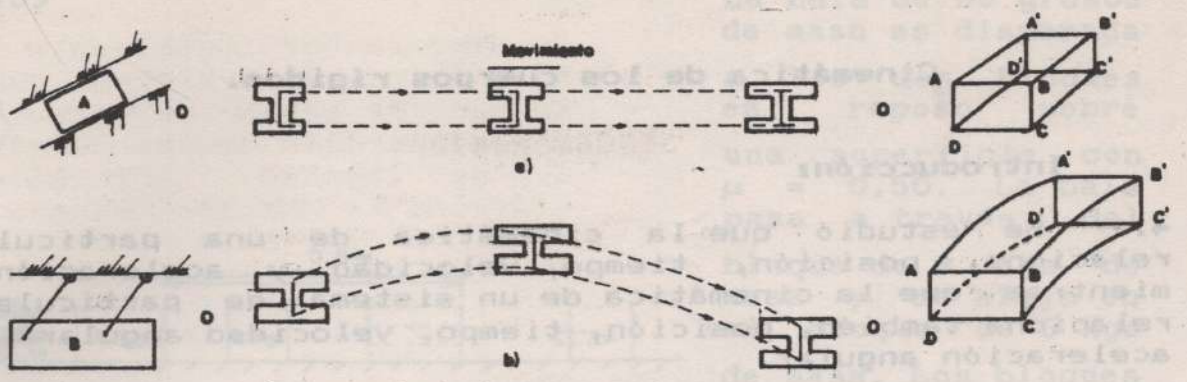


Fig. 4.1 - Translaciones rectilíneas y curvilíneas.

En general sean A y B partículas fijas en un cuerpo rígido, las cuales se mueven en translación rectilínea o curvilínea Fig. 4.2. El vector de posición relativa $\bar{r}_{B/A}$, constante en magnitud y dirección y los vectores de posición absoluta $\bar{r}_A$ y $\bar{r}_B$ variables están relacionadas por la ecuación.

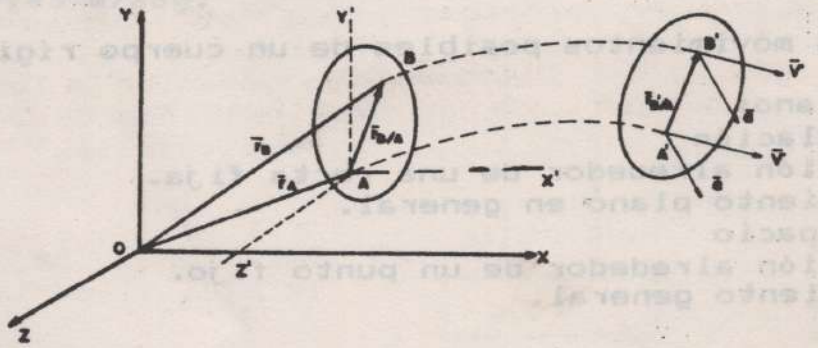


Fig. 4.2. Translación de un cuerpo rígido, posición, velocidad y aceleración.

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{r}_{B/A} \qquad (4\text{-}1)$$

Derivando respecto al tiempo la Ec. (4-1) se obtiene la relación entre las velocidades instantáneas de A y B así:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A \qquad (4\text{-}2)$$

ya que $\bar{r}_{B/A} = 0$

Derivando la Ec. (4-2) respecto al tiempo se obtiene la relación para las aceleraciones así:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A \qquad (4\text{-}3)$$

Conclusión: Cuando un cuerpo rígido está en movimiento de translación, todos los puntos del mismo tienen la misma velocidad y la misma aceleración en un instante cualquiera. Fig. 4.2. En el caso de translación rectilínea las direcciones de los vectores velocidad y aceleración tienen línea de acción constante durante el movimiento, mientras que en translación curvilínea las direcciones de los vectores velocidad y aceleración cambian tanto en magnitud como en dirección en cada instante.

4.3 Rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo

Un cuerpo rígido está en movimiento de rotación respecto a un eje fijo, cuando todas las partículas del mismo se mueven a lo largo de trayectorias circulares cuyos centros están sobre el mismo eje fijo. Este eje de rotación puede o no intersectar al cuerpo rígido. Si el eje intersecta al cuerpo, las partículas situadas sobre el eje carecen de velocidad y aceleraciones, ya que $r_o = 0$ entonces $\dot{r}_o = \ddot{r}_o = 0$. Fig. 4.3.a. Si el eje fijo de rotación está fuera del cuerpo rígido todas las partículas del mismo tienen velocidad y aceleración, Fig. 4.3 b.

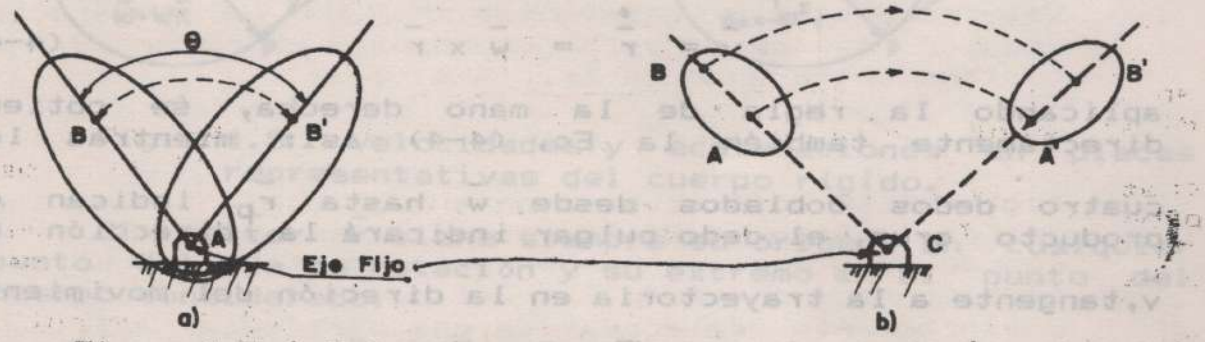


Fig. 4.3 – Rotación del cuerpo respecto a un fijo, que intersecta y no intersecta al cuerpo.

Sea un cuerpo rígido de forma cualquiera que rota respecto a un eje fijo cualquiera y que por conveniencia lo hacemos coincidir con el eje z, siendo su velocidad angular $\bar{w} = \dot{\theta}\bar{K} = w\bar{K}$, y el sentido de $\bar{w}$ puede obtenerse por la regla de la mano derecha en el sentido de rotación del cuerpo, P, un punto arbitrario del cuerpo que se mueve a lo largo de la trayectoria circular de radio b constante y con centro en el punto A. Fig. 4.4

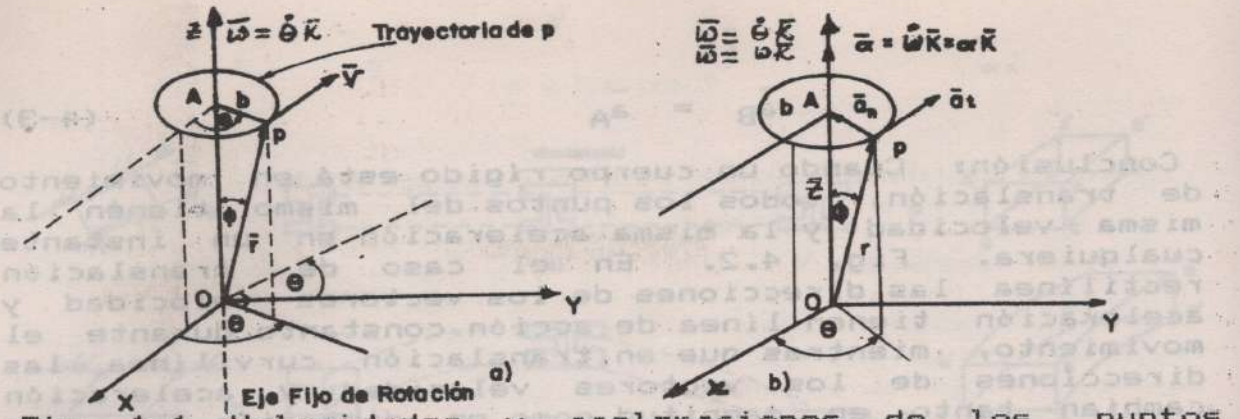


Fig. 4.4 Velocidades y aceleraciones de los puntos de un cuerpo rígido que rotan alrededor de un eje fijo.

El vector velocidad $\bar{v}$ del punto P es tangente a la trayectoria y se obtiene derivando el vector de posición en función del tiempo, entonces $\bar{v} = d\bar{r}/dt$.

Cuando O y P son puntos de un cuerpo rígido, la magnitud del vector $\bar{r}$ es constante y de acuerdo al apéndice A, Ec. (A-11); $\frac{d\bar{A}}{dt} = \bar{W}_A \times \bar{A}$ siendo $\bar{A}$= constante, entonces

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \bar{w} \times \bar{r} \qquad (4-4)$$

aplicando la regla de la mano derecha, se obtiene directamente también la Ec. (4-4) así: mientras los cuatro dedos doblados desde $\bar{w}$ hasta $\bar{r}_p$ indican el producto cruz, el dedo pulgar indicará la dirección de $\bar{v}$, tangente a la trayectoria en la direción del movimiento Fig. 4.4.a. Por lo tanto $\bar{v}$ es perpendicular al plano que contiene a los vectores $\bar{w}$ y $\bar{r}$, siendo $\bar{w}$ un vector libre asociado en cada instante al cuerpo rígido.

Nótese que los ángulos θ y Ø dependen de la posición de P en el cuerpo rígido, mientras que la velocidad angular $\dot{\theta}$ es independiente de esa posición.

La aceleración $\bar{a}$ de la partícula P en el cuerpo rígido se puede calcular derivando la Ec. (4-4) en función del tiempo, así:

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \frac{d(\bar{w}\times\bar{r})}{dt} = \dot{\bar{w}} \times \bar{r} + \bar{w} \times \bar{v} = \bar{\alpha} \times \bar{r} + \bar{w}\times(\bar{w} \times \bar{r}) \qquad (4-5)$$

ya que $\bar{v} = \bar{w} \times \bar{r}$ y $\bar{\alpha} = \frac{d\bar{w}}{dt} = \dot{\bar{w}}$ llamada aceleración angular del cuerpo rígido. Fig. 4.4.a

El término $\bar{\alpha} \times \bar{r}$ está orientado según la tangente a la circunferencia que describe el punto P y representa la componente tangencial de la aceleración del punto P.

El término $\bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})$ está dirigido según la normal a aquella circunferencia, en la dirección del radio, pasando por A y representa la componente normal de la aceleración del punto P. Fig. 4.4.b.

$$\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_n = \bar{\alpha} \times \bar{r} + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r}) \qquad (4\text{-}5a)$$

$\bar{w}$ y $\bar{\alpha}$ son válidas para cualquier punto del cuerpo rígido en ese instante.

Si el punto O se hace coincidir con el punto A, de tal manera que b=r y Ø = 90°, el cuerpo rígido se convierte en una placa representativa que contiene la trayectoria circular de P, siendo paralela al plano (xy), y rotando alrededor del eje fijo z. Fig. 4.5

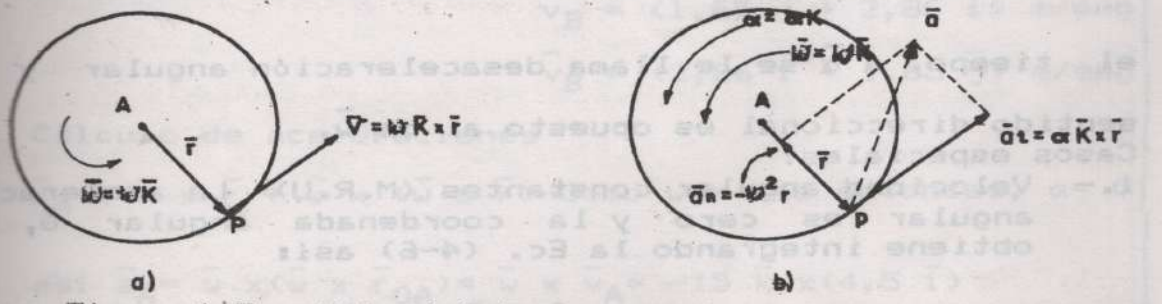


Fig. 4.5 Velocidades y aceleraciones en placas representativas del cuerpo rígido.

El vector $\bar{r}$ tiene siempre su origen en cualquier punto del eje de rotación y su extremo en el punto del cuerpo considerado.

En la Ec. (4-4), $\bar{v} = w\bar{k} \times \bar{r}$ entonces $v = wr$;

En la Ec. (4-5); $\bar{a} = \alpha\bar{k} \times \bar{r} - w^2 . \bar{r}$ entonces $a_t = \alpha r$;

$a_n = w^2 . r$, siendo de ésta manera:

$$\bar{a} = \bar{\alpha} \times \bar{r} - w^2 . \bar{r} \qquad (4\text{-}5.b)$$

La Ec. (4-5.b) se puede utilizar siempre que $\bar{w}$ y $\bar{r}$ sean perpendiculares (No aplicar ésto en el espacio donde $\bar{w}$ y $\bar{r}$ generalmente no son perpendiculares).

4.4 Ecuaciones cinemáticas que definen la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo.

El movimiento de rotación de un cuerpo rígido, alrededor de un eje fijo, puede estar completamente especificado en magnitud si uno cualquiera de los parámetros de ese movimiento es función conocida del tiempo t. Estos parámetros pueden ser la coordenada angular θ, la velocidad angular $w = \dot{\theta}$ o la aceleración angular $\alpha = \ddot{\theta} = \dot{w}$. Las derivadas con respecto al tiempo de éstos parámetros en forma general son:

$$w = d\theta/dt = \dot{\theta} \qquad (4-6)$$

$$\alpha = dw/dt = d^2\theta/dt^2 = \ddot{\theta} \qquad (4-7)$$

Eliminando dt de las Ecs. (4-6) y (4-7) se obtiene,

$$\alpha = w\ dw/d\theta \qquad (4-8)$$

ecuaciones análogas a las obtenidas para el movimiento rectilíneo de una partícula. Si $\bar{w}$ está decreciendo con el tiempo, a $\bar{\alpha}$ se le llama desaceleración angular y su sentido direccional es opuesto al de $\bar{w}$.

Casos especiales:

1.- Velocidad angular constantes (M.R.U) La aceleración angular es cero y la coordenada angular θ, se obtiene integrando la Ec. (4-6) así:

$$\theta = \theta_o + wt \qquad (4-9)$$

2.- Aceleración angular constante (M.R.U.A) Integrando la Ecs.(4-6) y (4-8) respecto al tiempo t y a la coordenada angular θ, respectivamente, se obtienen ecuaciones análogas a las del movimiento rectilíneo uniformemente aceleradas de una partícula, así:

$$w = w_o + \alpha t \qquad (4-10)$$

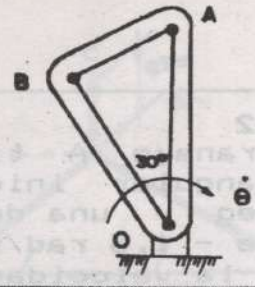
$$\theta = \theta_o + (w_o)t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (4-11)$$

$$w^2 = w^2{}_o + 2\alpha(\theta - \theta_o) \qquad (4-12)$$

donde w_o, θ_o y t=0, son valores correspondientes a condiciones iniciales.

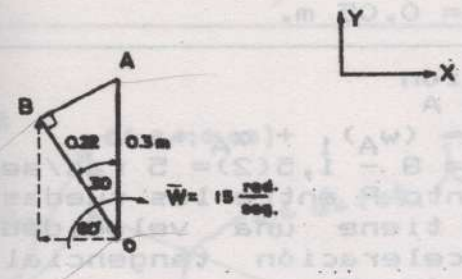
Si la aceleración angular no es cero, ni constante, como en los dos casos especiales, deben utilizarse las ecuaciones generales (4-7) ó (4-8). El sentido decrecional positivo es el mismo para θ, w y α.

$\frac{\alpha}{dw} = \frac{w}{d\theta} \Rightarrow \alpha = w \cdot \frac{dw}{d\theta}$



Ejemplo 4.1
Una placa triangular rota respecto a un eje que pasa por o con velocidad angular constante de 15 rad/seg. Determine las velocidades y aceleraciones de los puntos A y B en la posición mostrada.

Solución.
Cálculo de velocidades



$\bar{v}_A = \bar{w} \times \bar{r}_{oA} = -15\bar{k} \times 0{,}3\ \bar{j}$

$\underline{\bar{v}_A = 4{,}5\ \bar{i}\ m/seg}$

$\bar{v}_B = \bar{w} \times \bar{r}_{oB} = (-15\bar{k}) \times (-0{,}22 \times \cos 60°\ \bar{i} + 0{,}22 \operatorname{sen} 60\ \bar{j})$

$\bar{v}_B = (1{,}65\ \bar{j} + 2{,}86\ \bar{i})\ m/seg$

$\bar{v}_B = (2{,}86\ \bar{i} + 1{,}65\ \bar{j})\ m/seg$

Cálculo de aceleraciones

$\bar{a}_A = \bar{\alpha} \times \bar{r} + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})$ -Como w = cte entonces, $\alpha = 0$

asi $\bar{a}_A = \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r}_{OA}) = \bar{w} \times \bar{v}_A = -15\ \bar{k} \times (4{,}5\ \bar{i})$

$= -67{,}5\ \bar{j}\ m/seg^2$

Para el punto B.

$\bar{a}_B = \bar{W} \times (\bar{w} \times \bar{r}_{oB}) = \bar{w} \times \bar{v}_B = -15\ \bar{k} \times (2{,}86\ \bar{i} + 1{,}65\bar{j})$; asi

$\bar{a}_B = (-42{,}90j + 34{,}75\ \bar{i})\ m/seg^2 = (34{,}75\ \bar{i} - 42{,}90\bar{j})\ m/seg^2$

Graficamente sería

Diagrama de velocidades

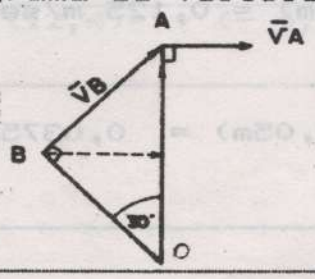
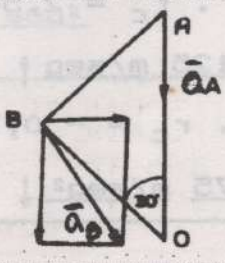
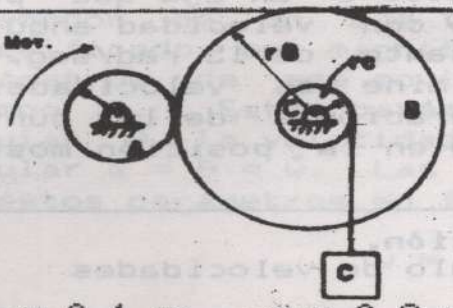


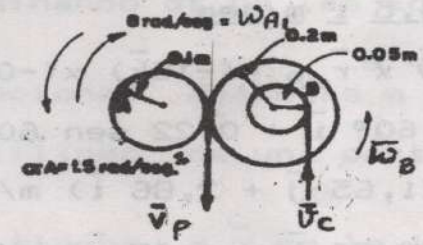
Diagrama de aceleraciones





Ejemplo 4.2
Si el engranaje A tiene una velocidad angular inicial de de 8 rad/seg y una desaceleración de − 1,5 rad/seg² , determine la velocidad y la la aceleración del bloque C cuando t= 2 seg.

r_A= 0,1 m; r_B= 0,2 m y r_C= 0,05 m.



Solución
Rueda A

$(w_A)_2 = (w_A)_1 + \alpha_A$

$(w_A)_2 = 8 - 1,5(2) = 5$ rad/seg

Un punto P entre las ruedas A y B tiene una velocidad y aceleración tangencial así:

$v_p = w_A \cdot r_A = 5(0,1) = 0,5$ m/seg y $\bar{v}_p = 0,5$m/seg ↓

$(a_p)_t = \alpha_A \cdot r_A = -1,5(0,1)$m/seg² y $\overline{(a_p)_t} = 0,15$m/seg² ↑

Rueda B

$$v_p = w_B(r_B); \quad w_B = \frac{v_p}{r_B} = \frac{0,5\text{m/seg}}{0,2\text{m/seg}} = 2,5\text{rad/seg} \;;$$

$\bar{w}_B = 2,5$ rad/seg ↻

$$(a_p)_t = \alpha_B \cdot r_B; = \alpha_B = \frac{(a_p)_t}{r_B} = \frac{-0,15\text{m/seg}^2}{0,2\text{ m}} =$$

$-0,75$ rad/seg²; $\bar{\alpha}_B = 0,75$ rad/seg² ↺

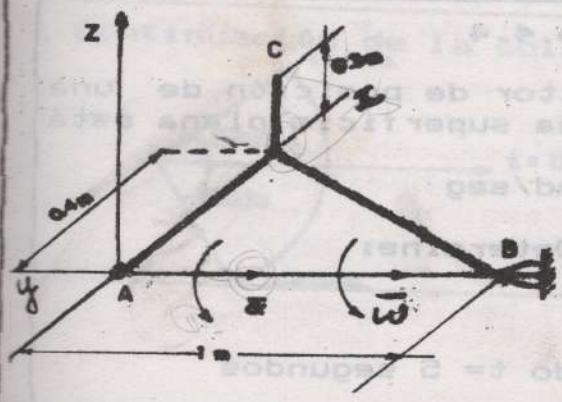
De esta forma, en la rueda C, se tiene:

$v_c = w_B \cdot r_c = 2,5$ rad/seg (0,05m) = 0,125 m/seg ;

$\bar{v}_c = \underline{0,125 \text{ m/seg}}$ ↑

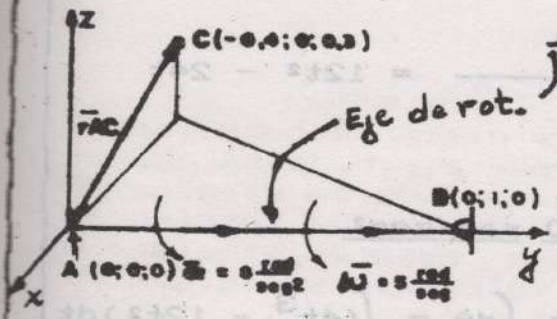
$a_c = \alpha_B \cdot r_c = -0,75$ rad/seg² (0,05m) = 0,0375m/seg²,

$\bar{a}_c = \underline{0,375 \text{ m/seg}^2}$ ↓



Ejemplo 4.3

El dispositivo de barras esta apoyado mediante juntas de rótula en A y B Si está girando alrededor del eje y, con una velocidad angular de 5rad/seg y una aceleración angular de)8) rad/seg², determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del punto C en el instante indicado.



Solución:

El vector unitario en la dirección de AB es.

$$\bar{\lambda}_{AB} = \left[0;1;0\right]$$

$$\bar{w} = w\bar{\lambda}_{AB} = 5\left[0;1;0\right] \text{ rad/seg}$$

$$\bar{\alpha} = \alpha.\bar{\lambda}_{AB} = 8\left[0;1;0\right] \text{ rad/seg}^2$$

La velocidad del punto C se obtiene por $\bar{v}_c = \bar{w} \times \bar{r}_{AC}$

$$\bar{r}_{AC} = \left[-0,4;0;03\right] m \qquad \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ -0,4 & 0 & 0,3 \end{vmatrix} = 1,5\,\bar{i} + 2\,\bar{k}$$

$$v_c = \sqrt{(1,5)^2 + (2)^2} = \underline{2,5 \text{ m/seg}}$$

Para calcular la aceleración del punto C, se tiene:

$$\bar{a}_c = \bar{\alpha} \times \bar{r}_{AC} + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r}_{AC}) = \bar{\alpha} \times \bar{r}_{AC} + \bar{w} \times \bar{v}_c$$

$$\bar{a}_c = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 8 & 0 \\ -0,4 & 0 & 0,3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ 1,5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (12,4\bar{i} - 4,3\,\bar{k}) \text{ m/seg}^2$$

$$a_c = \sqrt{(12,4)^2 + (-4,3)^2} = \underline{13,12 \text{ m/seg}^2}$$

Ejemplo 4.4

La velocidad angular del vector de posición de una partícula que se mueve sobre una superficie plana está dado por

$$w = (4t^3 - 12t^2)\ \text{rad/seg}$$

cuando $t = 0$; $\theta = -3$ radianes - Determine:

a) La aceleración angular
b) El desplazamiento angular
c) El ángulo total girado cuando $t = 5$ segundos

Solución:

a) $$\alpha = \frac{dw}{dt} = \frac{d(4t^3 - 12t^2)}{dt} = 12t^2 - 24t$$

para $t = 5$ seg.

$$\alpha_5 = 12\,(5)^2 - 24(5) = \underline{180\ \text{rad/seg}^2}$$

b) $$w = \frac{d\theta}{dt} = 4t^3 - 12t^2;\ \int d\theta = \int (4t^3 - 12t^2)dt$$

$$\theta = t^4 - 4t^3 + C \quad \text{para} \quad t = 0;\ \theta = -3;\ C = -3$$

$$\boxed{\theta = t^4 - 4t^3 - 3} \quad \text{para } t = 5\text{seg.}$$

$$\underline{\theta_5} = (5)^4 - 4\,(5)^3 - 3 = \underline{122\ \text{radianes}}.$$

c) Se debe observar que $w = 0$ para $t = 3$ seg. Entonces w es negativa desde $t = 0$ hasta $t = 3$ seg y positiva desde $t = 3$seg hasta $t = 5$ seg. De esta forma

$$\theta_3 = (3)^4 - 4\,(3)^3 - 3 = -30 \text{ radianes para } \theta_o = -3$$

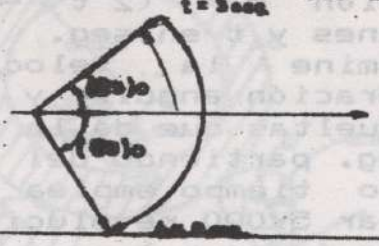
$$\theta_5 = 122 \text{ radianes para } \theta_o = -3$$

Si nos referimos a un nuevo origen $t = 0$; $\theta o = 0$, se tiene: $C = 0$, entonces.

$$(\theta_3)_o = (3)^4 - 4(3)^3 - 0 = 81 - 108 = -27\text{rad} \quad \text{para } \theta_o = 0$$

$$(\theta_5)_o = (5)^4 - 4(5)^3 - 0 = 625 - 500 = 125\text{rad} \quad \text{para } \theta_o = 0$$

Continuación de la solución 4.4

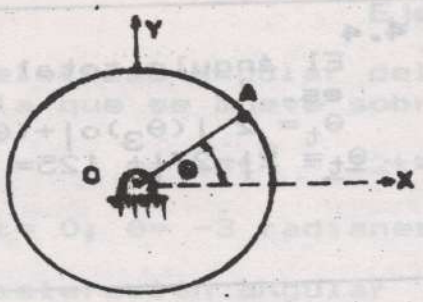


El ángulo total girado es.

$$\theta_t = 2\,|(\theta_3)_o| + (\theta_5)_o$$

$$\underline{\theta_t} = 2|-27| + 125 = \underline{179 rad}$$

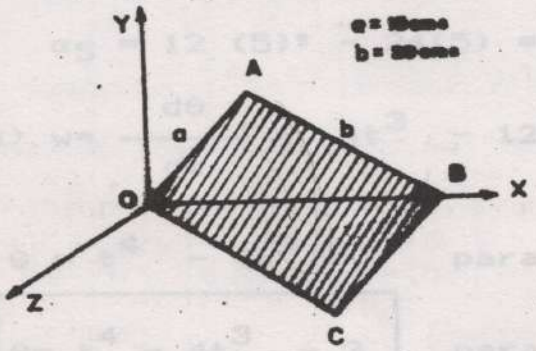
4.1.



La posición del punto A sobre la rueda está dada por la ecuación $\theta = (2t^3 - t^2 + 5)$ radianes y t en seg. Determine la velocidad aceleración angular y el número de vueltas que dá la rueda en 10 seg. partiendo del reposo. Cuánto tiempo emplea la rueda en dar 5.000 revoluciones por minuto (r.p.m).

R: θ = 303,19 revoluciones
w = 580 rad/seg.
α = 118 rad/seg^2
t = 9,51 seg.

4.2



Una placa rectangular OABC de lados a y b, está girando alrededor de la diagonal OB. En el instante considerado la placa está en el plano xy. Si la velocidad y aceleración de A son:

$\bar{v}_A = 60\ \bar{k}$ cms/seg

$\bar{a}_A = (36\bar{k} - 300\ \bar{j})$ cms/seg^2, determine la velocidad y aceleración angular de la placa

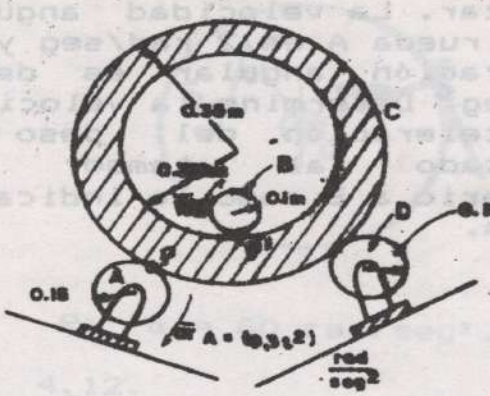
R: $\bar{w} = 5\ \bar{i}$ rad/seg.

$\bar{\alpha} = 3\ \bar{i}$ rad/seg^2.

4.3. Durante una ráfaga de viento, a las aspas de un molino de viento se les da una aceleración angular de (0,2 θ) rad/seg^2 en sentido horario. Si inicialmente las aspas tienen una velocidad angular de 6 rad/seg, determine la rapidez del punto P localizado en la punta de una de las aspas de 0,75m de largo, justamente después que el aspa ha dado dos vueltas.

R: v_p= 6,17 m/seg.

4.4



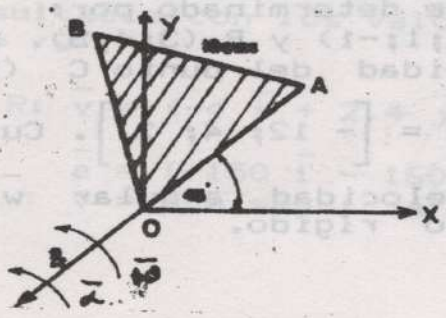
El cilindro de concreto C está sujeto a un movimiento rotacional producido por la rueda motriz en A. El rodillo B se mantiene en contacto con la superficie interior del cilindro y está libre para girar. Por analogía el rodillo en D esta libre para girar. Si la aceleración angular de A es $\alpha_A = (0,3t^2)$ rad/seg², cuando el cilindro está originalmente en reposo, determine la velocidad angular de B cuando t= 5 seg.

R: $\bar{w}_B = 16,08$ rad/seg.

4.5. La rotación de un volante está dada por la relación $\alpha = (10t - t^2)$ rad/seg². Cuántas revoluciones dará el volante que parte del reposo, antes de parar momentáneamente, para invertir su dirección.

R: $\theta = 223,81$ revoluciones.

4.6.



Una placa OAB en forma de triángulo equilátero gíra en su propio plano xy, alrededor de un eje que pasa por O, con una velocidad angular w = 5 rad/seg y una aceleración angular $\alpha = 1$ rad/seg², ambas en sentido antihorario. Determine las velocidades y las aceleraciones de los vértices A y B.

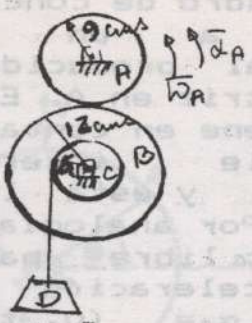
R: $\bar{v}_A = (-25\sqrt{2}\,\bar{i} + 25\sqrt{2}\,\bar{j})$ cms/seg

$\bar{v}_B = (-48,3\,\bar{i} - 12,34\,\bar{j})$ cms/seg

$\bar{a}_A = (-130\sqrt{2}\,\bar{i} - 120\sqrt{2}\,\bar{j})$ cms/seg²

$\bar{a}_B = (52,04\,\bar{i} - 244,09\,\bar{j})$ cms/seg².

4.7.

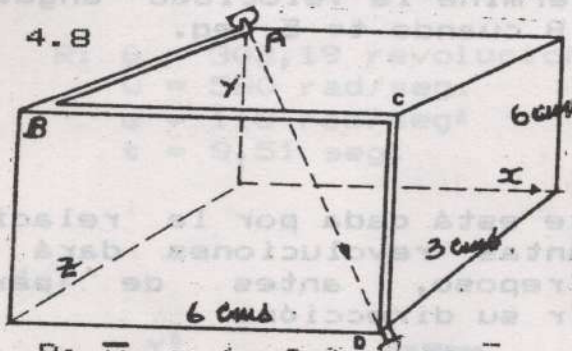


Los discos A y B rotan sin deslizar. La velocidad angular de la rueda A es 2 rad/seg y su aceleración angular es de 3 rad/seg². Determine la velocidad y aceleración del peso D conectado al tambor C, solidario a B como lo indica la figura.

R: $\bar{v}_D = 6$ cms/seg. ↑

$\bar{a}_D = 9$ cms/seg². ↑

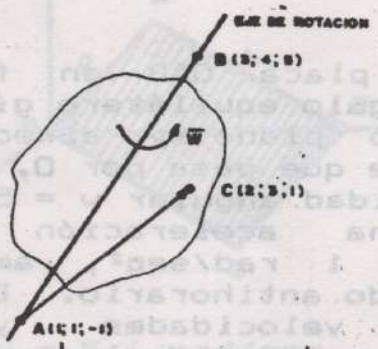
4.8



La barra ABCD gira alrededor de la línea AD con una velocidad angular constante de 3 rad/seg. Sabiendo que en el instante mostrado la componente vertical de la velocidad de la esquina B está dirigida hacia abajo, determine la velocidad de la esquina C.

R: $\bar{v}_C = (-6\,\bar{i} + 12\,\bar{k})$ cms/seg

4.9



Un cuerpo gira con velocidad angular constante alrededor de un eje determinado por: A (1;1;-1) y B (3;4;5). Si la velocidad del punto C (2;3;1) es $\bar{v}_c = \left[-12;\ 4;\ 2 \right]$. Cuál es la velocidad angular $\bar{w}$, del cuerpo rígido.

R: $\bar{w} = \left[4;\ 6;\ 12 \right]$ rad/seg.

4.10. Se requiere 1 segundo para que un tocadisco de 45 r.p.m alcance su rapidez normal después de comenzar a funcionar. Suponiendo un movimiento uniformemente acelerado, determinar:

a) La aceleración angular del tocadiscos,

b) Las componentes normal y tangencial de la aceleración de un punto del borde situado a 30 cms del centro cuando alcanza su rapidez de 45 r.p.m.

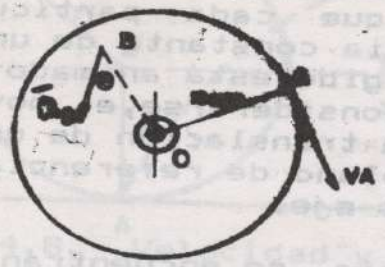
c) La aceleración total del mismo punto para el mismo instante.

R: a) $\bar{\alpha} = 4{,}71$ rad/seg²

b) $a_t = 1{,}41$ m/seg² ; $a_n = 6{,}66$ m/seg²

c) $\bar{a} = 6{,}81$ m/seg². 11,95°

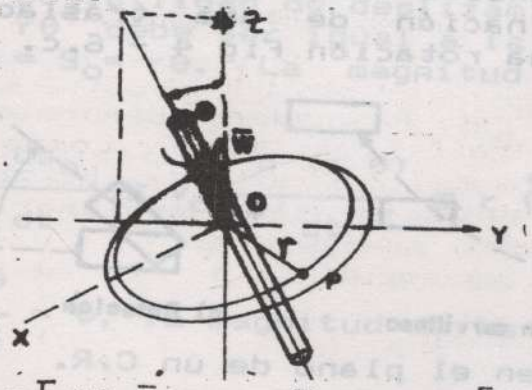
4.11.



El disco circular rota respecto al punto O. En cierto instante el punto A tiene una velocidad v_A = 1m/seg. en la dirección indicada y en ese instante la tangente del ángulo θ entre el vector aceleración total en el punto B con una línea radial que pasa por O es 0,6. Encuentre para ese instante la aceleración angular del disco.

R: $\alpha = 60$ rad/seg².

4.12.



El disco circular rota con una velocidad angular constante w= 50 rad/seg con respecto a su eje, el cual está inclinado respecto al plano y-z, un ángulo $\theta = tg^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ Determine las expresiones vectoriales de la velociadad y aceleración del punto P, cuando el vector de posición en ese instante es

$\bar{r} = [60\ \bar{i} + 48\ \bar{k}$ m.m. $+ 64\bar{j}]$ Comparar las magnitudes de estos resultados con los valores escalares dados por v= r.w y $a_n = rw^2$.

R: $\bar{v} = (-4\ \bar{i} + 2{,}4\ \bar{j} + 1{,}8\ \bar{k})$ m/seg.

$\bar{a} = (-150\ \bar{i} - 160\ \bar{j} - 120\ \bar{k})$ m/seg²

v = 5 m/seg ; a = 250 m/seg²

4.5. Movimiento plano en general. Cuando un cuerpo rígido se mueve en tal forma que cada partícula del mismo se conserva a una distancia constante de un plano fijo, se dice que el cuerpo rígido está animado de un movimiento plano tambien puede considerarse,el movimiento plano, como la combinación de la translación de un eje de referencia perpendicular a un plano de referencia y la rotación alrededor de dicho eje.

En la práctica de la ingenieria, se encuentran muchos problemas de cinemática, que corresponden a movimientos planos.- Ejemplos: Las ruedas de un vehículo, el mecanismo biela - manubrio, lo mismo que el movimiento de rotación. Sea un carro moviéndose sobre una vía curva plana Fig. 4.6.a Como combinación de una traslación curvilínea, Fig. 4.6.b y una rotación Fig 4 - 6.c.

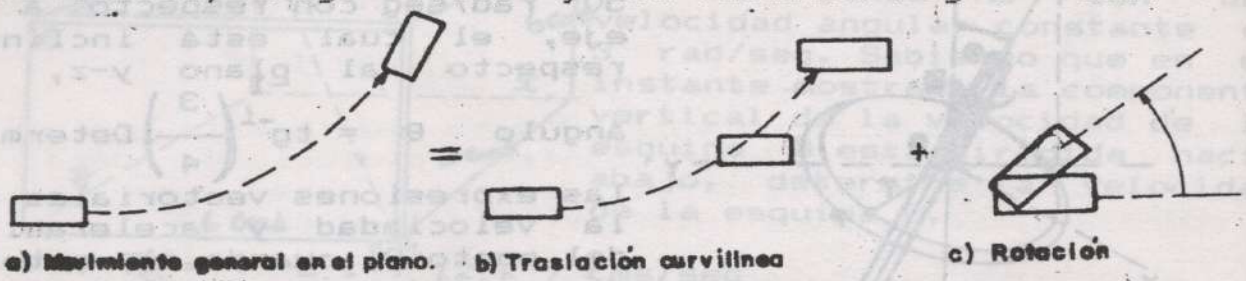


Fig. 4.6. Movimiento general en el plano de un C.R.

Otro ejemplo sería considerar una placa representativa de un cuerpo rígido que contiene dos partículas A y B y su desplazamiento desde A y B hasta A_1 y B_1 Fig 4.7.

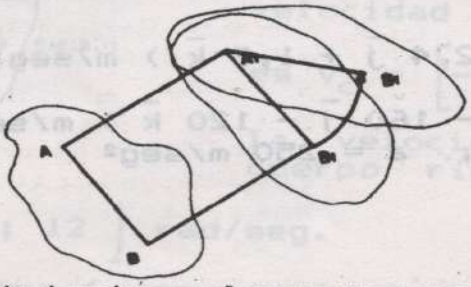


Fig. 4.7. Movimiento plano en general de una placa representativa.

La placa representativa punteada es una traslación al conservar AB la misma dirección y la otra placa en que B se desplaza hasta B_1 mientras A permanece fija produce una rotación alrededor de un eje que pasa por A.

Tambien cuando una rueda gira sin deslizar sobre una superficie plana se produce un movimiento plano bastante interesante. El centro O de la rueda posee un movimiento rectilíneo paralelo al plano. La Fig. 4.8, en línea contínua representa la rueda en su posición inicial y en línea punteada, después de desplazarse la cantidad S_o, hacia la derecha.

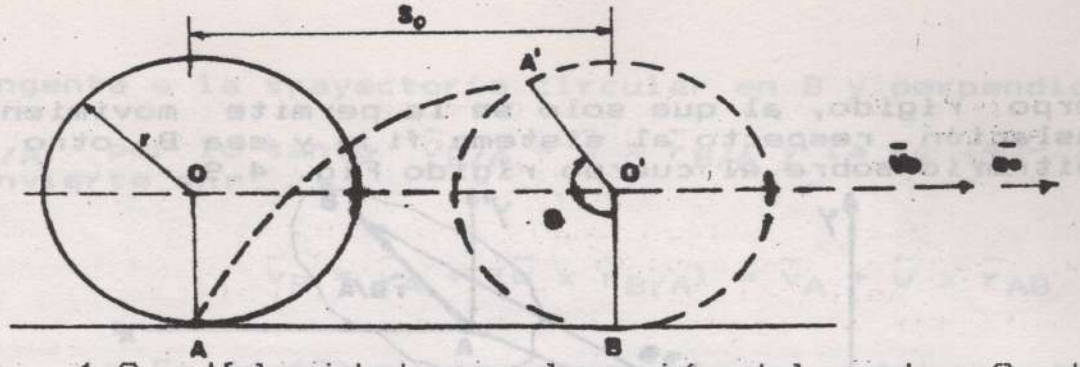


Fig. 4.8. Velocidad y aceleración del centro O de la rueda que gira sin deslizar.

El radio OA de la rueda gira en sentido horario al ángulo θ, hasta llegar a la posición O'A'. Si no existe la posibilidad de deslizamiento, la longitud del arco A'B = $r\theta$ debe ser igual a la distancia AB = S_o o sea que AB = $S_o = r\theta$. La magnitud de la velocidad del punto O es

$$\frac{ds_o}{dt} \equiv v_o = \frac{d\ (r\ \theta)}{dt} \equiv r\ \dot{\theta} = r\ w \quad \text{siendo } r = \text{constante},$$

$\frac{d\theta}{dt} = w$, la magnitud de la velocidad angular de la rueda.

$$a_o = \frac{dv_o}{dt} \equiv \frac{d(r.w)}{dt} \equiv r\alpha, \text{ aceleración lineal del punto O.}$$

Obsérve que la velocidad angular siempre es perpendicular al plano del movimiento y solo puede cambiar su magnitud, y que cuando el desplazamiento S_o está dirigido hacia la derecha el angulo θ tiene sentido horario, v_o se dirige tambien hacia la derecha y la velocidad angular tiene sentido horario.

4.6. Velocidad absoluta y relativa en el movimiento plano (análisis de velocidades).

Se ha definido el movimiento plano como la combinación de la traslación de un eje de referencia perpendicular al plano del movimiento y la rotación alrededor de dicho eje. Podemos visualizar cada uno de estos movimientos, separadamente utilizando un análisis de movimiento relativo de dos particulas en el cuerpo rígido.

Sean dos sistemas coordenados, uno fijo x,y,z que darán los valores absolutos y uno móvil x' y' z', cuyo origen coincide con el punto A; arbitrario sobre el

cuerpo rígido, al que solo se le permite movimiento de traslación respecto al sistema fijo y sea B otro punto arbitrario sobre el cuerpo rígido Fig. 4.9.

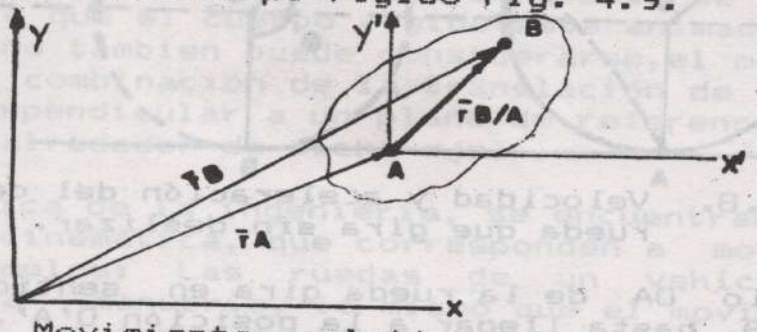


Fig. 4.9 Movimiento relativo de dos partículas cualesquiera pertenecientes a un cuerpo rígido.

La posición absoluta de B puede determinarse mediante la ecuación. $\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{r}_{B/A}$, siendo $\bar{r}_{B/A}$ el vector de posición relativa que localiza un punto arbitrario B en el cuerpo rígido con respecto al punto A.

Derivando respecto al tiempo a la Ec(4 - 1) se tiene:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{B/A} \qquad (4\text{-}13)$$

de ésta manera, la velocidad $\bar{v}_B$ de un punto cualquiera de un cuerpo rígido, se obtiene sumando vectorialmente la velocidad de traslación del origen móvil, A dado Fig. 4.10.b.. con la velocidad de rotación respecto a un eje que pasa por ese origen y representado por el vector $\bar{w} \times \bar{r}_{B/A}$, donde $\bar{w}$ es conocido, Fig. 4.10.c. Esta velocidad debida a la rotación es perpendicular a $\bar{r}_{B/A}$ y estará en el plano del movimiento.

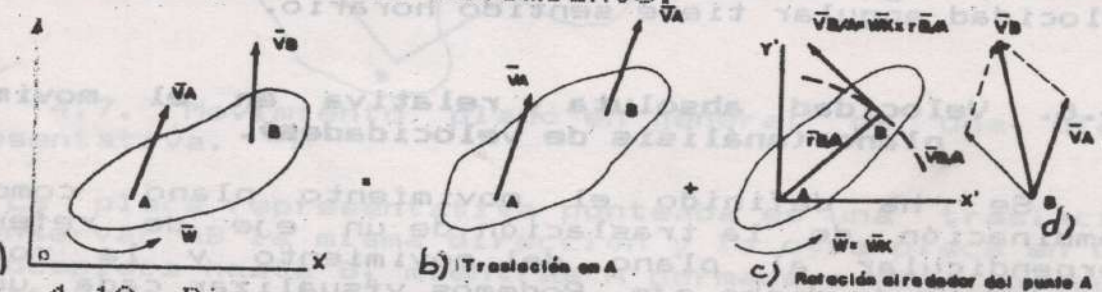


Fig. 4.10. Diagramas cinemáticos de las velocidades, en el movimiento general en el plano.

En la Ec(4 - 13), $\bar{v}_A$ es la velocidad absoluta de traslación del eje que pasa por A, y $\bar{v}_{B/A}$ es la velocidad relativa de la rotación alrededor de un eje que pasa por A, cuya magnitud es $v_{B/A} = w \cdot r_{B/A}$; su dirección es

tangente a la trayectoria circular en B y perpendicular a $\bar{r}_{B/A}$; por lo tanto $\bar{v}_{B/A} = \bar{w} \times \bar{r}_{B/A}$ y la Ec (4 - 13) se convierte en:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + (\bar{w} \times \bar{r}_{B/A}) = \bar{v}_A + \bar{w} \times \bar{r}_{AB} \quad (4\text{-}14)$$

La Ec.(4-13) puede representarse gráficamente por un triángulo de vectores cuyos lados son $\bar{v}_B, \bar{v}_A$ y $\bar{v}_{B/A}$ Fig. 4.10.d, siendo estos diagramas vectoriales la solución gráfica de dicha ecuación.

Nota. Cuando las diferentes partes de un mecanismo estan unidos por pasadores, se considera cada parte como un cuerpo rígido, sabiendo que los puntos donde las dos partes estan conectaddas, deben tener la misma velocidad absoluta. Fig.4.11.

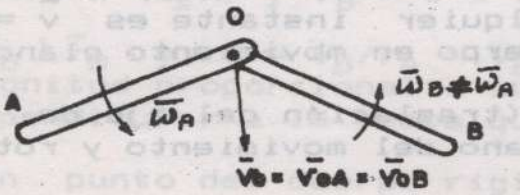


Fig.4.11. Velocidad de un punto común o entre dos partes de un mecanismo.

Los puntos de contacto en miembros (ruedas) que transitoriamente están en contacto pueden tener o no la misma velocidad absoluta. Si hay deslizamiento entre los miembros, los puntos en contacto tienen velocidades absolutas diferentes, como en la Fig.4.12.a. si no hay deslizamientos de los miembros en contacto, las velocidades absolutas de los puntos en contacto son iguales Fig.4.12.b.

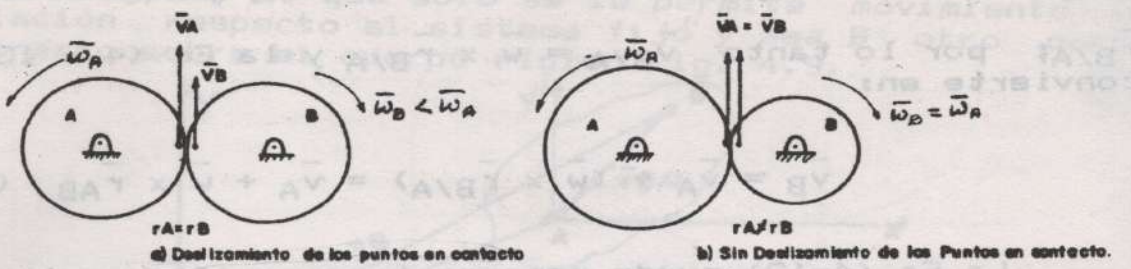


Fig. 4.12. Dos ruedas de radios iguales (a) y radios diferentes (b), rotando alrededor de sus ejes, con y sin deslizamiento relativo de una respecto a la otra.

4.7. Centro instantáneo de rotación en el movimiento plano.

La velocidad de cualquier punto de un cuerpo rígido, en el movimiento plano se puede determinar en forma sencilla, si se escoge otro punto que tenga velocidad cero en un instante considerado.

La velocidad de un cuerpo que rota alrededor de un eje fijo en cualquier instante es $\bar{v} = \bar{w} \times \bar{r}$ y la velocidad de un cuerpo en movimiento plano es:

$\bar{v} = \bar{v}_o + \bar{w} \times \bar{r}$ (traslación del eje de referencia que pasa por O $\perp$ al plano del movimiento y rotación alrededor de dicho eje).

Este movimiento plano puede reducirse a una rotación al rededor de un eje fijo en un instante cualquiera si $\bar{v}_o = 0$. Este eje que es perpendicular al plano del movimiento y además paralelo al vector velocidad angular intantáneo, se llama eje instántaneo de rotación (E.I) y se define como el lugar geometrico de los puntos de velocidad cero. La posición de éste E.I, de velocidad cero, pero no necesariamente de aceleración cero cambia continuamente.

De esta forma todos los puntos del cuerpo rígido se mueven en planos que son perpendiculares al vector velocidad angular.

El centro instantáneo de rotación (C.I) es el punto en el cual el E.I. es perpendicular al plano del movimiento, o en la intersección de ellos, y es fijo solo para la rotación pura de un cuerpo rígido. De modo que en cuanto a las velocidades, el cuerpo rígido parece rotar con respecto a su centro instantáneo de rotación C.I en el instante considerado.

4.7.1. Localización del C.I. Si se tiene una placa representativa de un cuerpo rígido y se conocen las direcciones de las velocidades de dos puntos cuales quiera A y B del cuerpo, Fig.4.13, se encuentra el centro instantáneo (C.I.) en la intersección de las perpendiculares trazadas a los vectores velocidad $\bar{v}_A$ y $\bar{v}_B$ que pasan por dichos puntos.

Fig.4.13. Localización del centro instantáneo de rotación.

Para los puntos A y B se cumple que:

$\bar{v}_A = \bar{v}_{CI} + \bar{w} \times \bar{r}_A$ y $\bar{v}_B = \bar{v}_{CI} + \bar{w} \times \bar{r}_B$, si $v_{CI} = 0$, entonces $\bar{v}_A = \bar{w} \times (\overline{C_I A})$ y $\bar{v}_B = \bar{w} \times (\overline{C_I B})$ y por lo tanto $\bar{v}_A \perp \bar{r}_A$; $\bar{v}_B \perp \bar{r}_B$ y $w = v_B/r_A = v_B/r_B$. Asi, $\bar{v}_A$ y $\bar{v}_B$ tienen una magnitud proporcional a su distancia al C.I. y dirección perpendicular a la recta que une a dicho punto con el C.I.

Si algún punto del cuerpo rígido tiene velocidad nula, ese será su propio centro instantáneo de rotación.

Casos Especiales.

Si las direcciones de las velocidades $\bar{v}_A$ y $\bar{v}_B$ son paralelas entre si, de diferentes magnitudes y las perpendiculares trazadas a ellas desde A y B coinciden, el centro instantáneo C.I. se encuentra en la intersección de la línea AB con la línea que une los extremos de los vectores $\bar{v}_A$ y $\bar{v}_B$.
Fig 4.14.

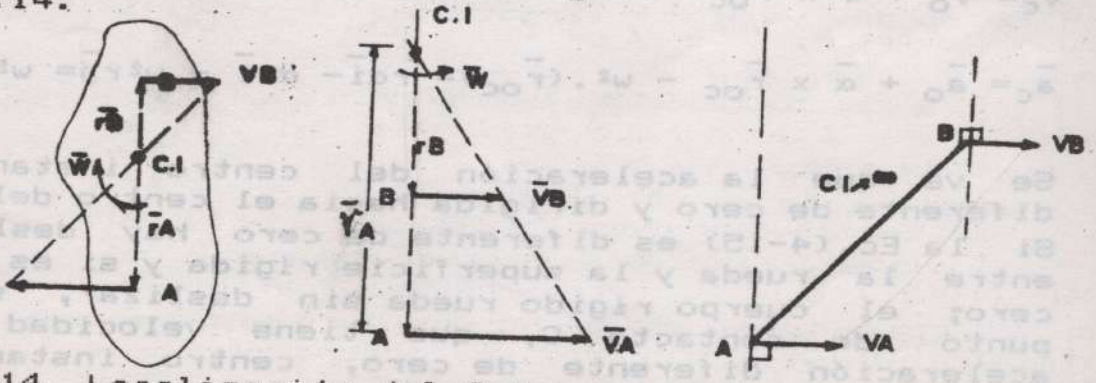


Fig.4.14. Localización del C.I.para vectores paralelos.

Si en la Fig. 4.14.b. los vectores $\bar{v}_A$ y $\bar{v}_B$ fueran de igual magnitud, el C.I. estaría a una distancia infinita y $w = 0$, todos los puntos de la placa tendrían la misma velocidad y su movimiento sería de traslación únicamente.

4.7.2. Centro instantáneo para el rodamiento perfecto de un disco a lo largo de una línea recta o curva fija.

Un caso especial del movimiento plano, es el del rodamiento de un disco, que avanza sin deslizar a lo largo de una línea recta o curva, con velocidad angular $\bar{w}$ y aceleración angular $\bar{\alpha}$. Fig 4.15.

Si en el punto de contacto C de la recta o curva fija con el disco móvil, está el centro instantáneo de rotación, ($\bar{v}_c = 0$), el disco rueda sin deslizar, pero si $\bar{v}_c$ es diferente de cero, hay deslizamiento entre discos y la superficíe rígida.

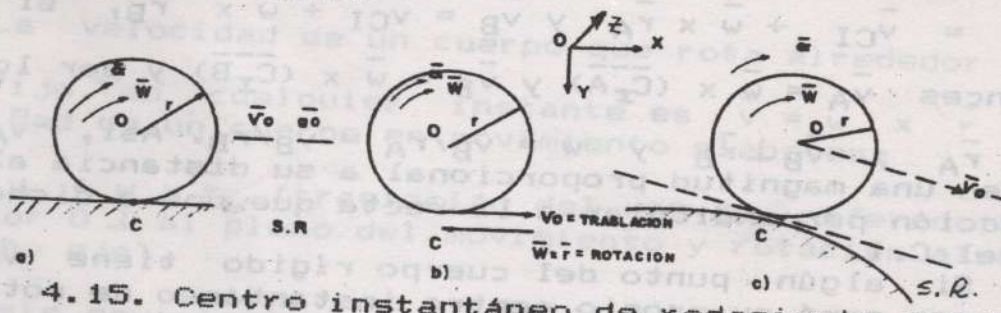


Fig. 4.15. Centro instantáneo de rodamiento perfecto de un disco.

Se ha demostrado que la velocidad y aceleración del punto O es $v_o = rw$ y $a_o = r\alpha$, Fig. 4.15.a.

La velocidad y la aceleración del punto de contacto C, son:

$$\bar{v}_c = \bar{v}_o + \bar{w} \times \bar{r}_{oc} = rw\bar{i} + w\bar{k} \times (r\bar{j}) = rw\bar{i} - wr\bar{i} = 0 \qquad (4\text{-}15)$$

$$\bar{a}_c = \bar{a}_o + \bar{\alpha} \times \bar{r}_{oc} - w^2.(\bar{r}_{oc}) = r\alpha\bar{i} - \alpha r\bar{i} - w^2 r\bar{j} = w^2 r\bar{j} \qquad (4\text{-}16)$$

Se ve que la aceleración del centro instantáneo es diferente de cero y dirigida hacia el centro del disco. Si la Ec.(4-15) es diferente de cero hay deslizamiento entre la rueda y la superficie rígida y si es igual a cero; el cuerpo rígido rueda sin deslizar, siendo el punto de contacto C, que tiene velocidad cero y aceleración diferente de cero, *centro instantáneo de rotación*, Fig.4.15.b y c.

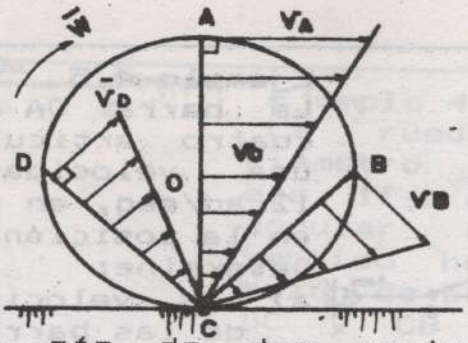
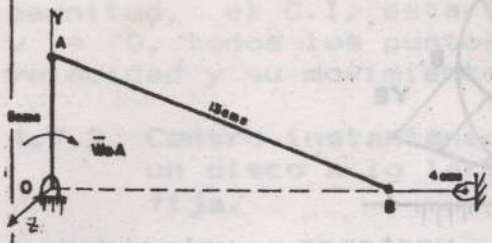


Fig. 4.15.d.

Si existen más de dos vectores velocidad en diferentes puntos de la rueda, cada punto se mueve con una velocidad perpendicular a la línea que une dicho punto con C, punto de contacto de la rueda con la superficie en reposo.
Fig 4.15. d.

Conclusión: De acuerdo con la Fig. 4.15.d, la magnitud de la velocidad de un punto crece en relación directa a su distancia al eje instantáneo de rotación, dando lugar a una distribución triangular de la velocidad.



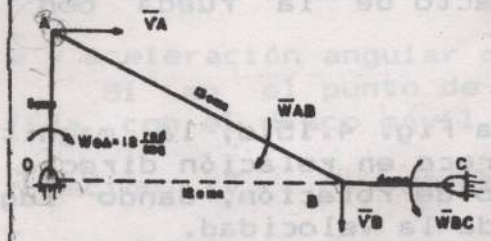
Ejemplo 4.5

La barra OA de la figura con cuatro articulaciones tiene una velocidad angular de 12rad/seg, en sentido horario, en la posición mostrada.

Determine:

a) Las velocidades angulares de las barras AB y BC.

b) La velocidad de B.



Solución

Barra OA

$$\bar{v}_A = \bar{w}_{oA} \times \bar{r}_{oA} = -12\bar{k} \times (5\ \bar{j})$$

$$\bar{v}_A = 60\ \bar{i}\ \text{(cms/seg)}$$

Barra AB, tomando un eje que pasa por A.

$$(1)\quad \bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{B/A} = \bar{v}_A + \bar{w}_{AB} \times \bar{r}_{AB}$$

Barra BC.

$$(2)\quad \bar{v}_B = \bar{v}_C + \bar{v}_{B/C} = 0 + \bar{w}_{CB} \times \bar{r}_{CB} = w_{CB}\bar{k} \times (-4\ \bar{i})$$

Se supone la rotación de la barra BC en sentido antihorario o sea positivo.

Igualando (1) con (2) se tiene:

$$60\bar{i} + w_{AB}\bar{k} \times (12\ \bar{i} - 5\ \bar{j}) = -4\ w_{CB}\bar{j} \text{ o sea}$$

$$60\bar{i} + 12\ w_{AB}\bar{j} + 5w_{AB}\bar{i} = -4\ w_{CB}\bar{j}$$

igualando coeficientes en $\bar{i}, \bar{j}$, se tiene:

$$\bar{i})\ 60 + 5w_{AB} = 0$$

$$\bar{j})\ 12\ w_{AB} = -4\ w_{CB}$$

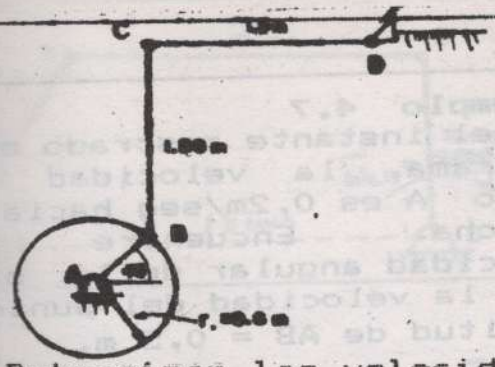
de donde $w_{AB} = -12\text{rad/seg}$; $\bar{w}_{AB} = -12\ \bar{k}\ \underline{\text{rad/seg}}$

$$w_{CB} = \frac{12(-12)}{-4} = 36\ \text{rad/seg} \ ; \quad \bar{w}_{CB} = \underline{36\ \bar{k}\ \text{rad/seg}}$$

Remplazando en (2) se tiene:

$$\bar{v}_B = 36\bar{k} \times (-4\ \bar{i}) = -\underline{144\ \bar{j}\ \text{cms/seg}}$$

El signo tanto de $\bar{w}_{AB}$, $\bar{w}_{CB}$ y $\bar{v}_B$ indica el sentido de esos vectores.



Ejemplo 4.6
La rueda de 1,20 m de diámetro gira alrededor del eje fijo A con una velocidad angular de 20rad/seg, en sentido horario, y decrece a razón de 5rad/seg². Las barras DC y CB son horizontal y vertical respectivamente.

Determinar las velocidades angulares de las barras en dicha posición.

Solución:

$\bar{w}=-20\bar{k}$ rad/seg²; $\bar{\alpha}=5\bar{k}$ rad/seg²

En la rueda

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{B/A} = \bar{w} \times \bar{r}_{AB}.$$

$$\bar{v}_B = -20\bar{k} \times \left(0{,}6\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} + 0{,}6\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}\right)$$

$$= (-6\sqrt{2}\bar{j} + 6\sqrt{2}\bar{i}) \quad (1)$$

En la barra BC.

$\bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{v}_{C/B} = \bar{v}_B + \bar{w}_{BC} \times \bar{r}_{BC}$, entonces:

$$\bar{v}_C = \bar{v}_B + w_{BC}\bar{k} \times (1{,}5\bar{j}) = 6\sqrt{2}\bar{i} - 6\sqrt{2}\bar{j}) - 1{,}5w_{BC}\bar{i} \quad (2)$$

Barra CD.

$$\bar{v}_C = \bar{v}_D + \bar{v}_{C/D} = \bar{w}_{DC}\bar{k} \times \bar{r}_{DC} = w_{DC}\bar{k}\times(-1{,}5\bar{i}) = -1{,}5w_{DC}\bar{j} \quad (3)$$

Igualando (2) y (3) se tiene:

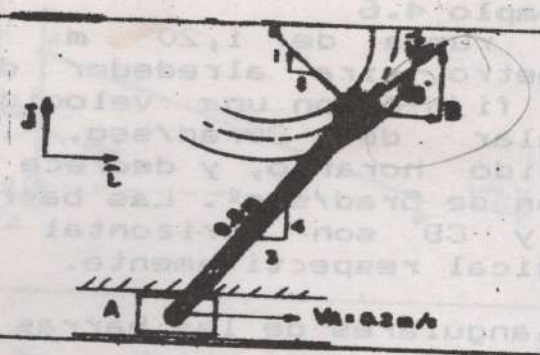
$$-1{,}5w_{DC}\bar{j} = 6\sqrt{2}\bar{i} - 6\sqrt{2}\bar{j} - 1{,}5\, w_{BC}\bar{i}$$

Igualando coeficientes en $\bar{i}, \bar{j}$, entonces:

$\bar{i}$) $0 = 6\sqrt{2} - 1{,}5\, w_{BC}$; $w_{BC} = 5{,}66$ rad/seg.

$\bar{j}$) $-1{,}5\, w_{DC} = -6\sqrt{2}$; $w_{DC} = 5{,}66$ rad/seg.

$$\bar{w}_{BC} = \bar{w}_{DC} = 5{,}66 \text{ rad/seg } \bar{k}$$



Ejemplo 4.7
En el instante mostrado en el diagrama, la velocidad del punto A es 0,2m/seg hacia la derecha. Encuentre la velocidad angular de la barra AB y la velocidad del punto B. Longitud de AB = 0,5 m.

Solución:

Barra AB.

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{B/A} = \bar{v}_A + \bar{w}_{AB} \times \bar{r}_{AB}$$

$$= 0,2\bar{i} + w_{AB}\bar{k} \times \left(\frac{3}{5} \times 0,5\bar{i} + \frac{4}{5}\, 0,5\bar{j}\right)$$

$\bar{v}_B$ es tangente a la trayectoria y por lo tanto se conoce su dirección asi:

$$v_B \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}\right) = 0,2\bar{i} + 0,3w_{AB}\bar{j} - 0,4w_{AB}\bar{i}$$

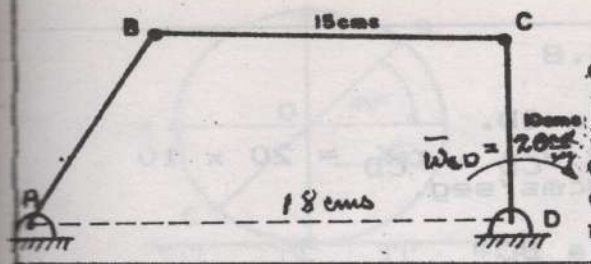
$$\bar{i}) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} v_B = 0,2 - 0,4w_{AB} \qquad (1)$$

$$\bar{j}) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} v_B = 0,3\, w_{AB} \qquad (2)$$

Resolviendo las Ecs. (1) y (2), se tiene:

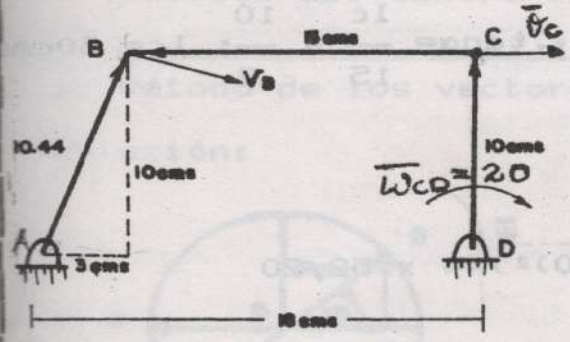
$$\underline{\bar{v}_B} = 0,121 \text{ m/seg} = \underline{(0,086\bar{i} \pm 0,086\bar{j})\text{m/seg}}$$

$$\underline{\bar{w}_{AB}} = 0,29\, \bar{k}\,(\text{rad/seg}) = \underline{0,29\text{rad/seg}}$$



Ejemplo 4.8

Determine la velocidad del extremo B de la barra AB de la figura mostrada en ese instante, utilizando el método de los vectores unitarios y el del centro instantáneo de rotación.



Solución:

a) Metodos de los vectores unitarios

Barra CD.

$$\bar{v}_C = \bar{v}_D + \bar{v}_{C/D} = \bar{w}_{CD} \times \bar{r}_{DC}$$

$$\bar{v}_C = -20\bar{k} \times (10\bar{j}) = 200\bar{i}\ cms/seg$$

Barra BC.

$$\bar{v}_B = \bar{v}_C + \bar{v}_{B/C} = \bar{v}_C + \bar{w}_{BC} \times \bar{r}_{CB}$$

$$\bar{v}_B = 200\bar{i} + \bar{w}_{BC}\bar{k} \times (-15\bar{i})$$

$$\bar{v}_B = 200\bar{i} - 15\,\bar{w}_{BC}\bar{j} \qquad (1)$$

Barra AB

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{B/A} = \bar{w}_{AB} \times \bar{r}_{AB}\bar{k} \times (3\bar{i} + 10\bar{j}) =$$

$$3w_{AB}\bar{j} - 10w_{AB}\bar{i} \qquad (2)$$

Igualando (1) con (2) se tiene:

$$200\bar{i} - 15w_{BC}\bar{j} = -10w_{AB}\bar{i} + 3w_{AB}\bar{j}$$

$\bar{i}$) $200 = -10\ w_{AB}$; $w_{AB} = -20 rad/seg$; $\bar{w}_{AB} = -20\bar{k} rad/seg$

Remplazando en (2) se tiene:

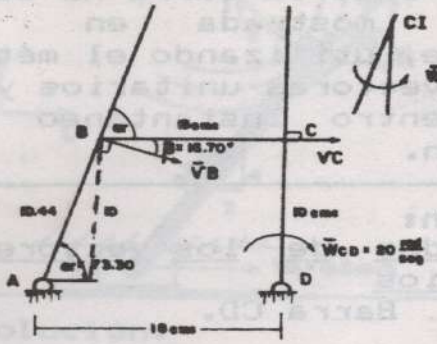
$$\bar{v}_B = 3(-20)\bar{j} - 10\ (-20)\bar{i} = \underline{200\bar{i} - 60\bar{j})}\ \underline{cms/seg}$$

$$v_B = \sqrt{(200)^2 + (60)^2} = 208,81 cms/seg.$$

b) Método del centro instantáneo de rotación.

A y D son los centros instantáneos de las barras AB y CD y C_I el de la barra BC.

Continuación de la solución 4.8



Barra CD.

$v_C = w_{CD} \cdot r_{CD} = 20 \times 10$

$=200$cms/seg.

Barra BC

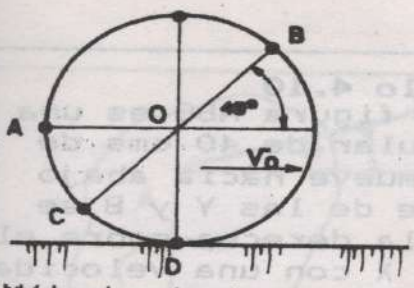
$v_C = w_{BC}(lc)$ pero en el ΔBCC_I, $tag\alpha = \frac{lc}{15} = \frac{10}{3}$; $lc = 50$cms

$$w_{BC} = \frac{v_C}{l_c} = \frac{200}{50} = 4 \text{ rad/seg}$$

$$v_B = w_{BC}(l_B) = 4(\sqrt{(15)^2 + (50)^2}) = 4 \times 52,20$$

$$= \underline{208,81}\text{cms/seg}$$

$\bar{v}_B = 208,81$ cms/seg $\beta = 16,17°$



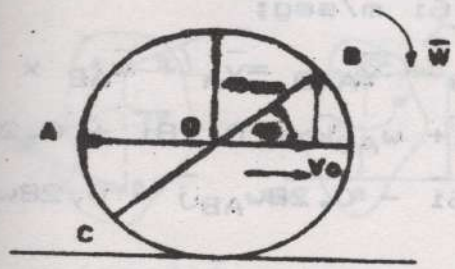
Ejemplo 4.9

Sabiendo que el radio del disco es de 40cms y su velocidad v_o es 30/m/seg. y que además rueda sobre la superficie horizontal sin deslizar, determine las velocidades de los puntos A y B, utilizando:

a) Método de los vectores unitarios
b) Métodos del centro intantáneo de rotación

a) Método de los vectores unitarios

Solución:



$$v_o = 30 \text{ m/seg} = w.r$$

$$w = \frac{v_o}{r} = \frac{30}{0,4} = 75 \text{ rad/seg}$$

$$\bar{w} = 75 \text{ rad/seg}$$

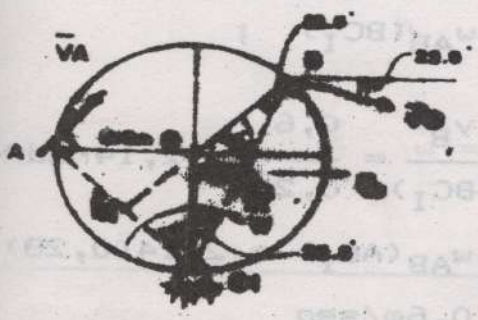
$$\bar{v}_A = \bar{v}_o + \bar{v}_{A/o} = \bar{v}_o + \bar{w} \times \bar{r}_{OA}.$$

$$\bar{v}_A = 30\bar{i} + (-75\bar{k})(-0,4\bar{i}) = (\underline{30\bar{i}} + \underline{30\bar{j}}) \text{ m/seg}$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_o + \bar{w} \times (\bar{r}_{oB}) = 30\bar{i} + (-75\bar{k}) \times (0,4 \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{i} + 0,4 \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{j})$$

$$\bar{v}_B = 30\bar{i} - 21,21\bar{j} + 21,21\bar{i} = (\underline{51,21\bar{i}} - \underline{21,21\bar{j}}) \text{m/seg}$$

b) Método del centro instantáneo de rotación



El triángulo OBC_I es isósceles
El centro instantáneo es C_I, por lo tanto

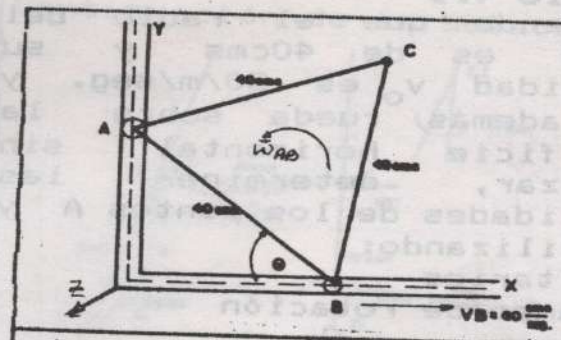
$$v_A = w.(l_A) = 75(\sqrt{(0,4)^2 + (0,4)^2}) = 75 \times 0,57 = \underline{42,43} \text{m/seg}$$

$\bar{v}_A = (\underline{30\bar{i}} + \underline{30\bar{j}}) \text{m/seg}$ igual al anterior $v_B = w.l_B$ pero por el teorema del coseno se tiene.

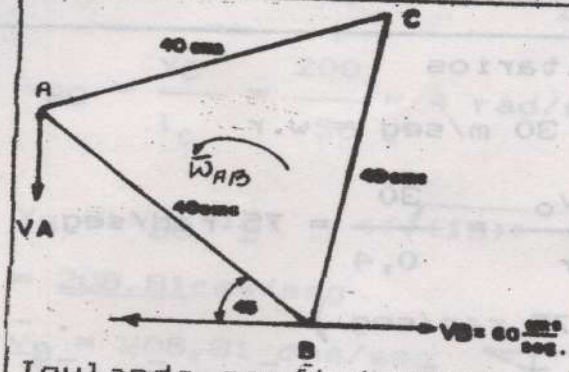
$$(l^2)_B = (0,4)^2 + (0,4)^2 - 2(0,4)(0,4) \cos 135° = 0,55$$

$l_B = 0,74$m.- Por lo tanto

$$v_B = 75(0,74) = 55,50 \text{m/seg.} \quad ; \quad \bar{v}_B = \underline{55,50} \angle 22,5°$$



Ejemplo 4.10
En la figura ABC es una placa triangular de 40 cms de lado. A se mueve hacia abajo sobre el eje de las Y y B se mueve hacia la derecha sobre el eje de las X con una velocidad de 60cms/seg. Deteermine la velocidad de A para $\theta = 45°$



Solución

a) Método de los vectores unitarios.

$$\bar{v}_B = 0,6\bar{i} \text{ m/seg};$$

$$\bar{v}_A = \bar{v}_B + \bar{v}_{A/B} = \bar{v}_A + \bar{w}_{AB} \times \bar{r}_{BA}$$

$$\bar{v}_A = 0,6\bar{i} + w_{AB}\bar{k} \times (-0,28\bar{i} + 0,28\bar{j})$$

$$v_A\bar{j} = 0,6\bar{i} - 0,28w_{AB}\bar{j} - 0,28w_{AB}\bar{i}$$

Igulando coeficientes se tiene:

$\bar{i}$) $0 = 0,6 - 0,28w_{AB}$; $w_{AB} = 2,14$rad/seg ;

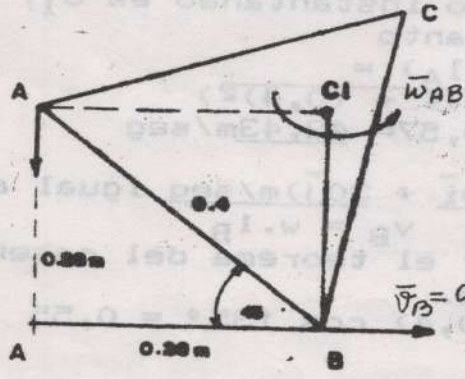
$\bar{w}_{AB} = 2,14\bar{k}$ rad/seg

$\bar{j}$) $-v_A = -0,28\, w_{AB}$

$$v_A = 0,28(2,14) = 0,6 \text{ m/seg}$$

$$\bar{v}_A = -\underline{0,6\bar{j}} \text{ m/seg}$$

b) Método del centro instantáneo de rotación



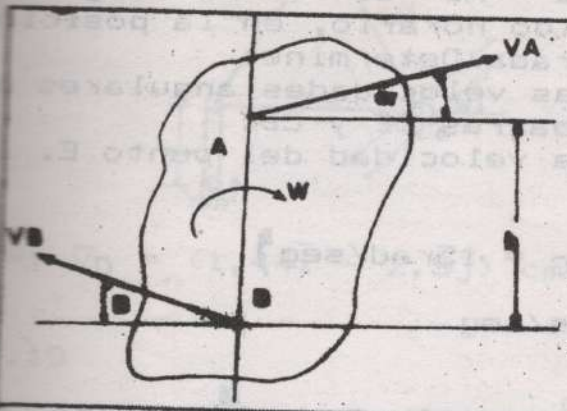
$$v_B = w_{AB}(BC_I) \;;$$

$$w_{AB} = \frac{v_B}{(BC_I)} = \frac{0,6}{0,28} = 2,14 \text{rad/seg}$$

$$v_A = w_{AB}(AC_I) = 2,14(0,28)$$

$$= 0,6 \text{m/seg}$$

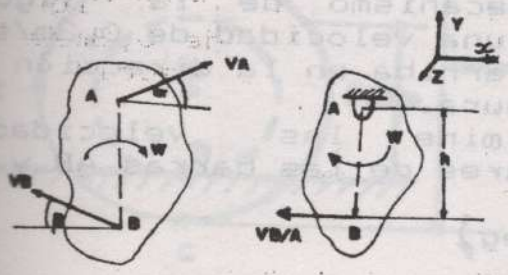
$$\bar{v}_A = 0,6 \text{ m/seg} \downarrow$$



Ejemplo 4.11

El cuerpo rígido de forma arbitraria se mueve en el plano.

Si se conocen h y α y la rapidez de A y B es $v_A = v_B = v$, calcule la velocidad angular w del cuerpo y la dirección β de v_B.



Solución:

Por el punto A pasa un eje que se traslada y alrededor del cual rota el cuerpo rígido.

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{B/A} = \bar{v}_A + \bar{w} \times \bar{r}_{AB}$$

Descomponiendo en componentes los vectores, se tiene:

$$-v_B(\cos\beta)\bar{i} + v_B \operatorname{sen}\beta\,\bar{j} = v_A \cos\alpha\,\bar{i} + v_A \operatorname{sen}\alpha\,\bar{j} - w\bar{k}\times(-h\bar{j})$$

igualando coeficientes:

$\bar{i}$) $-v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha - h\,w$ (1)

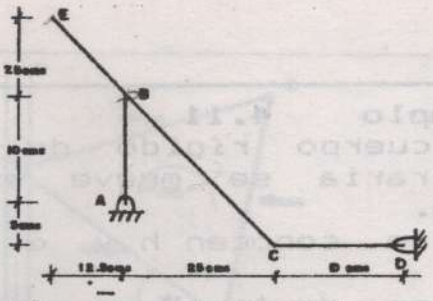
$\bar{j}$) $v_B \operatorname{sen}\beta = v_A \operatorname{sen}\alpha$ (2)

De (2) $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$; $\alpha = \beta$

De (1) $$w = \frac{(v_A\cos\alpha + v_B\cos\beta)}{h} = \frac{2v}{h}\cos\alpha$$ de donde

$$\bar{w} = \frac{2v}{h}\cos\alpha\,\downarrow$$

4.13

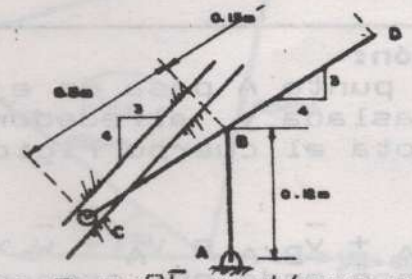


La velocidad angular de la barra AB es 9 rad/seg en sentido horario, en la posición mostrada. Determine:
a) Las velocidades angulares de las barras CE y CD.
b) La velocidad del punto E.

R: a) $\bar{w}_{CE} = 6\text{rad/seg}$; $\bar{w}_{DC} = 15\text{rad/seg}$

b) $\bar{v}_E = (135\bar{i} + 75\bar{j})$ cms/seg

4.14

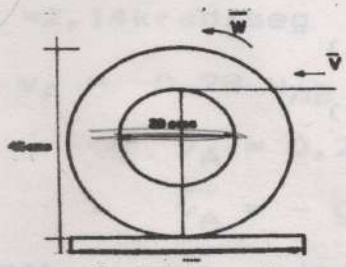


El rodillo C de la barra CD del mecanismo de la figura posee una velocidad de 0,3m/seg hacía arriba en la dirección de la ranura.
Determine las velocidades angulares de las barras AB y CD

R: $\bar{w}_{AB} = -3\bar{k}$ rad/seg = 3rad/seg

$\bar{w}_{BC} = -2\bar{k}$ rad/seg = 2rad/seg

4.15



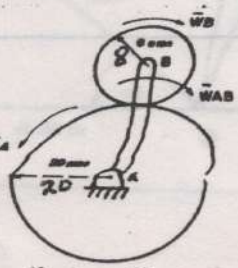
Un disco rueda sin deslizar, hacia la izquierda y enrolla un cable sobre un tambor de 20cms de diámetro. Calcule la velocidad v del cable si la velocidad angular de la rueda es de 2rad/seg;

R: $\bar{v} = -0,60\bar{i}$ m/seg

4.16. Resuelva el problema 4.15 utilizando el método del centro instantáneo de rotación.

R: $\bar{v} = -0,60\bar{i}$ m/seg

4.17.

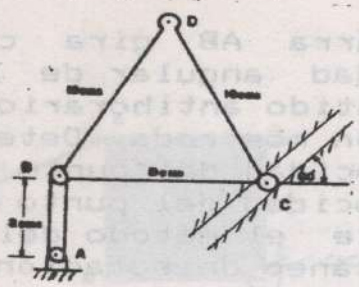


La rueda A gira en sentido antihorario con velocidad angular, $w_A = 20$ rad/seg.

Determine la velocidad angular de la rueda B para la cual la velocidad angular de la barra AB es $w_{AB} = 5$rad/seg horaria.

R: $\bar{w}_{AB} = -67,5\bar{k}$ rad/seg

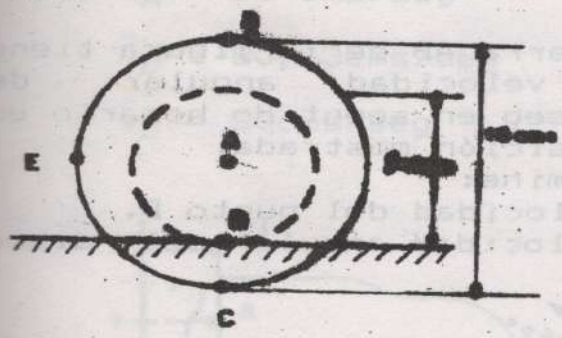
4.18



La velocidad angular de la placa BCD es 0,5rad/seg en sentido horario. Determine la velocidad del punto D.

R: $\bar{v}_D = (1,44\bar{i} - 2,5\bar{j})$ cms/seg.

4.19



En una rueda que gira y se desliza sobre una pista elevada, la velocidad del punto A es 12cms/seg hacia la izquierda y la velocidad angular de la rueda es 4rad/seg en sentido horario.

Determine las velocidades lineales de los puntos B,C,D y E.

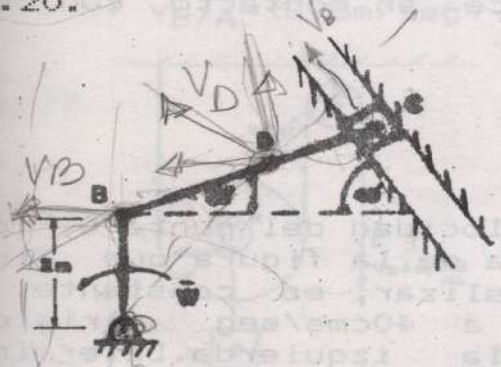
R: $\bar{v}_B = -28\bar{i}$ cms/s

$\bar{v}_C = -36\bar{i}$ cms/seg

$\bar{v}_D = 12\bar{i}$ cms/seg

$\bar{v}_E = (-12\bar{i} + 24\bar{j})$ cms/seg

4.20.

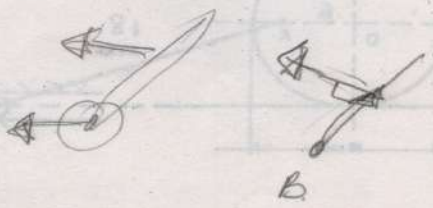


La barra AB de la figura está girando con velocidad angular de 4rad/seg en sentido antihorario. Cuál es la velocidad angular de la barra BC en la posición mostrada.

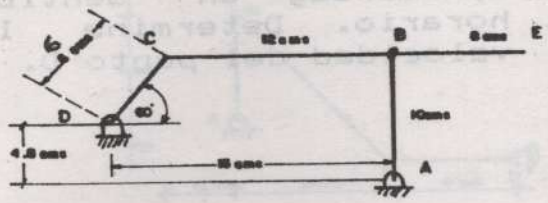
Cuál es la velocidad del punto D que está en el centro de la barra BC. La barra BC = 3metros.

R: $\bar{\omega}_{BC} = 7,27\bar{k}$ rad/seg.

$\bar{v}_D = (-13,45\bar{i} + 9,45\bar{j})$m/seg.



4.21

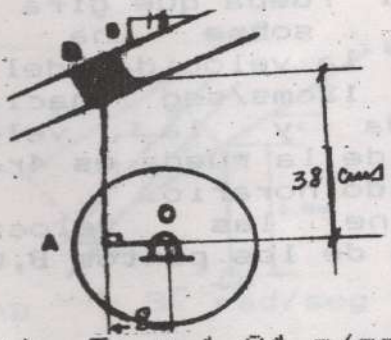


La barra AB gira con una velocidad angular de 4rad/seg en sentido antihorario, en la posición mostrada. Determine:
a) Velocidad del punto C.
b) Velocidad del punto E.
Utilice el método del centro instantáneo de rotación.

R: a) $\bar{v}_C$ = 46,19 cms/seg ∠30°

b) $\bar{v}_E$ = 42,76 cms/seg ∠21,06°

4.22

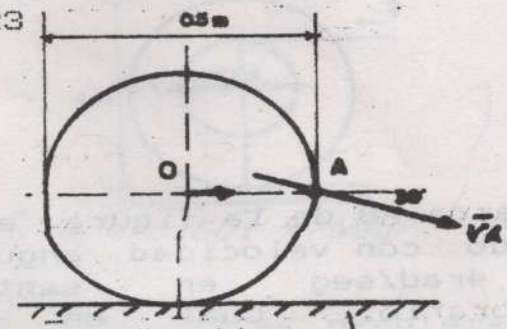


La barra AB de la figura tiene una velocidad angular de 3rad/seg en seentido horario en la posición mostrada.
Determine:
a) Velocidad del punto B.
b) Velocidad angular del disco OA.

R: a) $\bar{v}_B$ = 1,24 m/seg ∠22,62°

b) $\bar{w}_{AO}$ = 5,94 rad/seg ↻

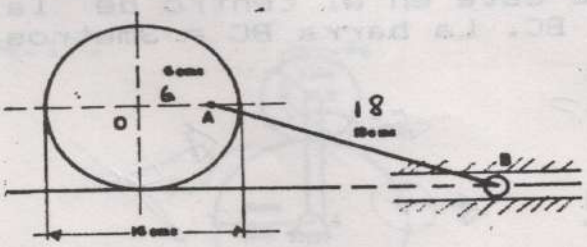
4.23



El punto A de la periferia de la rueda, tiene una velocidad de 3m/seg en la dirección definida en la figura. Determine la velocidad angular de la rueda suponi endo que *permanece en contacto* con el plano.

R: $\bar{w}$ = 6rad/seg. ↻

4.24

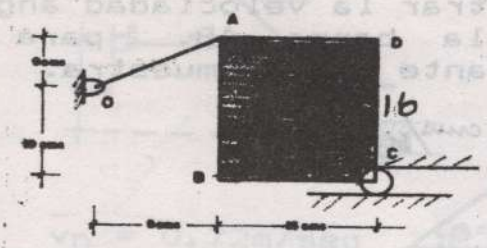


La velocidad del punto O, de la rueda de la figura que gira sin deslizar, es constante e igual a 40cms/seg dirigida hacia la izquierda. Determine la velocidad lineal del punto B. en la posición mostrada.

Utilice centro instantáneo de rotación.

R: $\bar{v}_B$ = 58,89cms/seg. ←

4.25



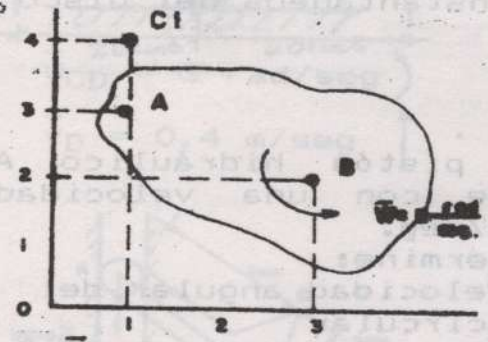
La placa ABCD de la figura está articulada a la barra OA en el punto A. y el rodillo C se desliza en la ranura horizontal. En la posición mostrada la velocidad de C es 70 cms/seg hacia la derecha. Determine las velocidades de los puntos A,B y D. Utilice centro instantáneo de rotación.

R: $\bar{v}_A$ = 50 cms/seg 53,13°

$\bar{v}_B$ = 80,63cms/seg 29,74°

$\bar{v}_D$ = 30cms/seg →

4.26



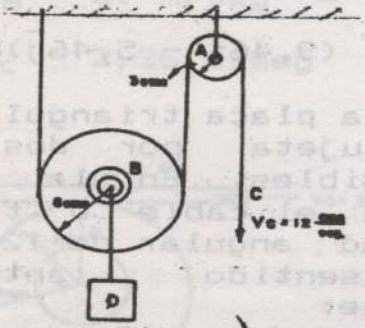
El centro instantáneo de rotacción para el cuerpo está localizdo en el punto (1,4). Si éste cuerpo tiene una velocidad angular de 3rad/seg determinar:
a) Velociad absoluta de A.
b) Velocidad absoluta de B
c) Velocidad relativa de B con respecto a A.

R: a) $\bar{v}_A$ = 3m/seg → ó $\bar{v}_A = 3\bar{i}$ m/seg

b) $\bar{v}_B$ = 6√2 m/seg 45° ó $\bar{v}_B = (6\bar{i} + 6\bar{j})$m/seg

c) $\bar{v}_{B/A}$ = 3√5m/seg 63,43° ó $\bar{v}_{B/A} = (3\bar{i} + 6\bar{j})$m/seg

4.27



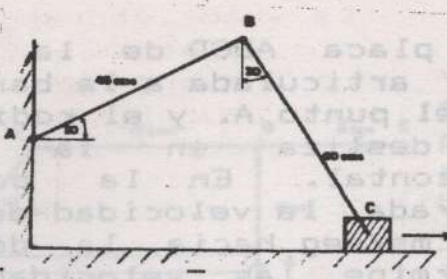
Si el extremo del cable se jala hacia abajo con una rapidez de v_c = 12cmss/seg, determine la velociadad angular de las poleas A y B y la rapidez hacia arriba del cuerpo D. Suponga que el cable no se desliza sobre las poleas.

R: $\bar{w}_A$ = 4rad/seg ↻ = $-4\bar{k}$ rad/seg

$\bar{w}_B$ = 1rad/seg ↺ = $1\bar{k}$ rad/seg

$\bar{v}_D$ = 6 cms/seg ↑ = $6\bar{j}$ cms/seg

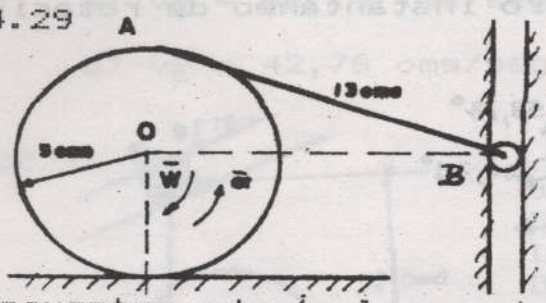
4.28



El sistema que se muestra está articulado en A. Encontrar la velociadad angular de la barra AB. para el insstante que se muestra.

R: $\bar{w}_{AB} = -1\bar{k}$ rad/seg

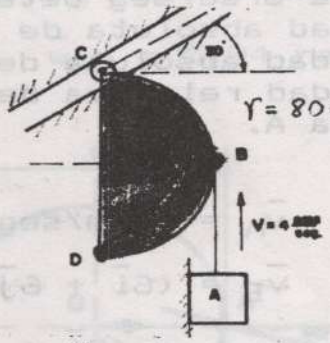
4.29



El disco O tiene rodamiento perfecto con una velocidad angular de 8 rad/seg, y una aceleración angular de 2rad/seg². La barra AB está unida a la periferie del disco en A. El extremo B se mueve a lo largo de una guía vertical. Hallar la velocidad de B. Encuentre además los centros instantáneos del disco y la barra AB.

R: $\bar{v}_B = -192\bar{j}$ cms/seg

4.30

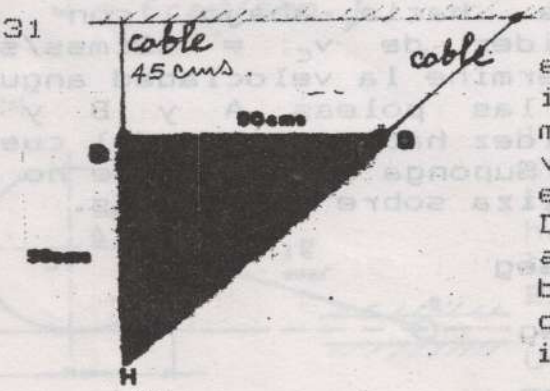


El pistón hidráulico A se mueve con una velocidad de 4cms/seg.
Determine:
a) Velocidad angular del plato semicircular
b) Velocidad del punto D
c) Centro instantáneo de rotación en el instante mostrado.

R: a) $\bar{w}_p = 0,12$rad/seg ↻

b) $\bar{v}_D = 11,09$ cms/seg $\angle 30° = (9,46\bar{i} - 5,46\bar{j})$cms/seg

4.31

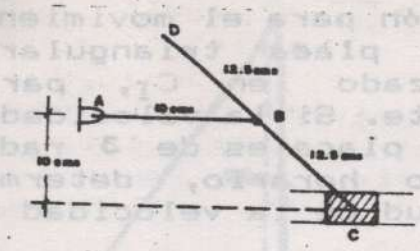


La placa triangular rígida está sujeta por dos cables inextensibles. En la posición mostrada el cable CD tiene una velocidad angular de 12 rad/seg en sentido antihorario.
Determine:
a) Velocidad angular de la placa.
b) Velocidad del centroide G y del punto H. Utilice centro instantaneo de rotación.

R: a) $\bar{w}_p = 10,80$ rad/seg ↻

b) $\bar{v}_G = 402,52$ cms/seg $\angle 26,57° = (360\bar{i} - 180\bar{j})$cms/seg

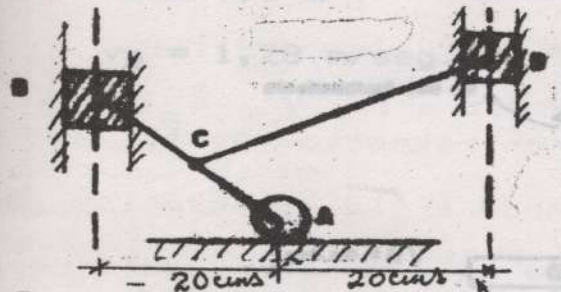
4.32



La barra AB tiene una velocidad angular en sentido antihorario de 3rad/seg en la posición mostrada. Determine la velocidad del punto D. usando el método del centro instantáneo de rotación.

R: $\bar{v}_D = 0,72 m/seg$ $\beta = 56,31°$

4.33

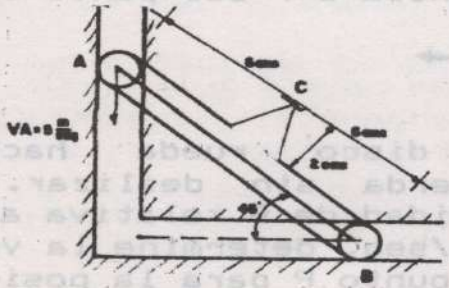


La velocidad del centro de la rueda, que tiene rodamiento libre, es v_A = 75cms/seg hacia la derecha en la posición mostrada. Determine la velocidad de la corredera D y la velocidad angular de la barra CD, utilizando centro intantáneo de rotación.

R: $w_{CD} = 3$ rad/seg

$\bar{v}_D = 0,4$ m/seg

4.34

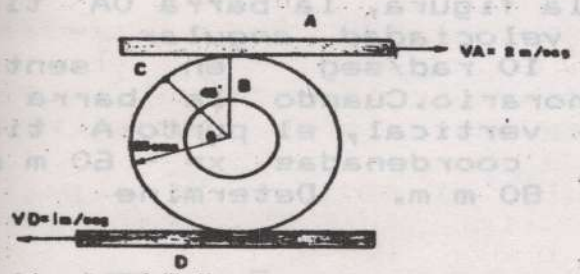


Los extremos de la barra AB, de 12 cms de longitud se mueven según las guías de la figura. Para la posición mostrada, A tiene una velocidad de 5 m/seg hacia abajo.
Determine las velocidades de los puntos B y C.

R: $\bar{v}_B = 5\bar{i}$ m/seg = 5m/seg ⟶

$\bar{v}_C = 2,36$ m/seg $45°$

4.35

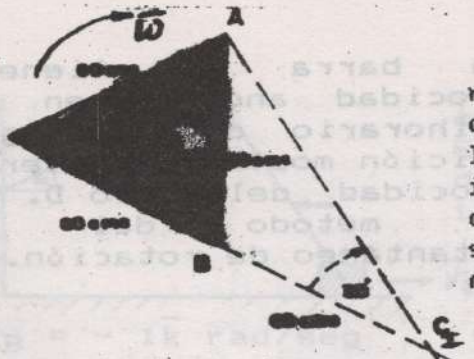


Un disco doble rueda sin deslizar entre las dos placas A y D, que se mueven paralelamente en sentidos opuestos. Si v_A = 2m/seg y v_D = 1 m/seg, localizar el centro instantáneo de rotación del disco y determinar las velocidades de los puntos B y C en ese instante.

R: $\bar{v}_B = \bar{i}$ m/seg = 1 m/seg ⟶

$\bar{v}_C = 1,89$ m/seg. $45°$

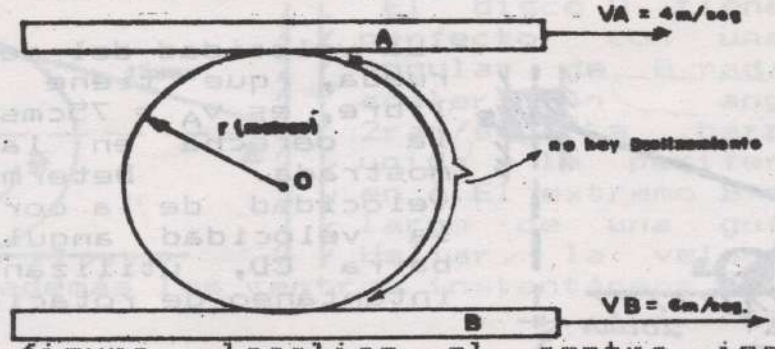
4.36



El centro instantáneo de rotación para el movimiento plano de la placa triangular, está localizado en C_I, para éste instante. Si la velocidad angular de la placa es de 3 rad/seg en sentido horario, determine, la magnitud de la velocidad del C_g.

R: v_{cg} = 274,95 cms/seg

4.37.

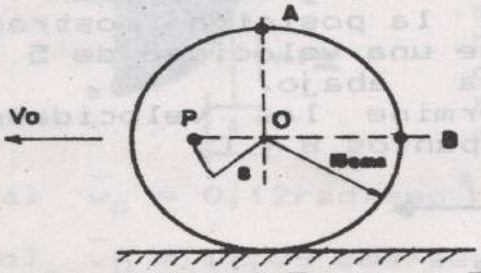


En la figura, localice el centro instantáneo de velocidad cero y la velocidad del punto O.

R: C_I se encuentra a la distancia 5 r del punto O.

$\bar{v}_o = 5\,\bar{i}$ m/seg = 5 m/seg ⟶

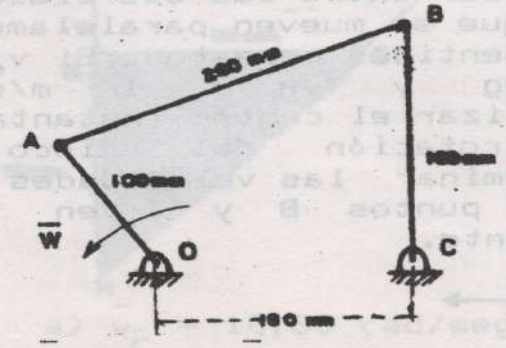
4.38



El disco rueda hacia la izquierda sin deslizar. Si la velocidad de B relativa a A es de 1,5 m/seg, determine la velocidad del punto P para la posición de la figura.

R: $\bar{v}_p = (-1{,}06\bar{i} - 1{,}50\bar{j})$ m/seg

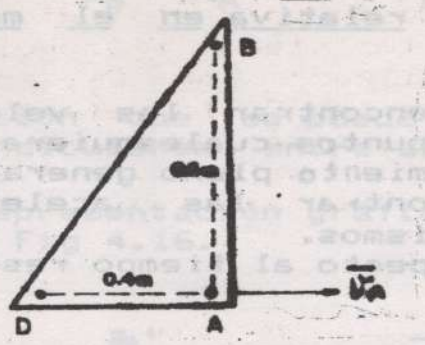
4.39



En la figura, la barra OA tiene una velociadad angular w = 10 rad/seg en sentido antihorario.Cuando la barra CB está vertical, el punto A tiene como coordenadas x= - 60 m m y y = 80 m m. Determine la velocidad angular $\bar{w}_{AB}$ y $\bar{w}_{BC}$.

R: $\bar{w}_{AB} = 2{,}5\bar{k}$ rad/seg

4.40



El punto A de la placa triangular recta tiene una velocidad v_A = 1 m/seg, en el instante y la dirección mostrada y la placa tiene una velocidad angular de 2 rad/seg en sentido horario. Encontrar la distancia b del punto A al centro instantáneo de rotación y la rapidez del punto D.

R: b = 0,5 m

v_D = 1,28 m/seg.

4.8. Aceleración absoluta y relativa en el movimiento general en un plano

El método desarrollado para encontrar las velocidades absolutas y relativas de dos puntos cualesquiera en un cuerpo rígido sujeto a un movimiento plano general puede aplicarse tambien para encontrar las aceleraciones absolutas y relativas de los mismos.

Derivando la Ec. (4-13) respecto al tiempo resulta la expresión vectorial

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{B/A} \qquad (4-17)$$

Donde $\bar{a}_A$ y $\bar{a}_B$ son aceleraciones absolutas del punto A de referencia y del punto B arbitrario y $\bar{a}_{B/A}$ es la aceleración relativa de B con respecto a A. En el movimiento plano, $\bar{a}_A$ corresponde a la traslación del cuerpo con A y $\bar{a}_{B/A}$ corresponde a la rotación del cuerpo alrededor de un eje que pasa por A.

Derivando la Ec. (4-14) respecto al tiempo se tiene:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\alpha} \times \bar{r}_{B/A} + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r}_{B/A}) \qquad (4-18)$$

Como los términos de la forma $\bar{\alpha} \times \bar{r}$ y $\bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})$ representan las componentes tangencial y normal de la aceleración relativas, respectivamente, la Ec. (4-18) puede escribirse asi.

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + (\bar{a}_{B/A})_t + (\bar{a}_{B/A})_n \qquad (4-19)$$

Por lo tanto las componentes escalares de $\bar{a}_{B/A}$ son:

$$(a_{B/A})_t = (r_{B/A})\alpha \qquad (4-20)$$

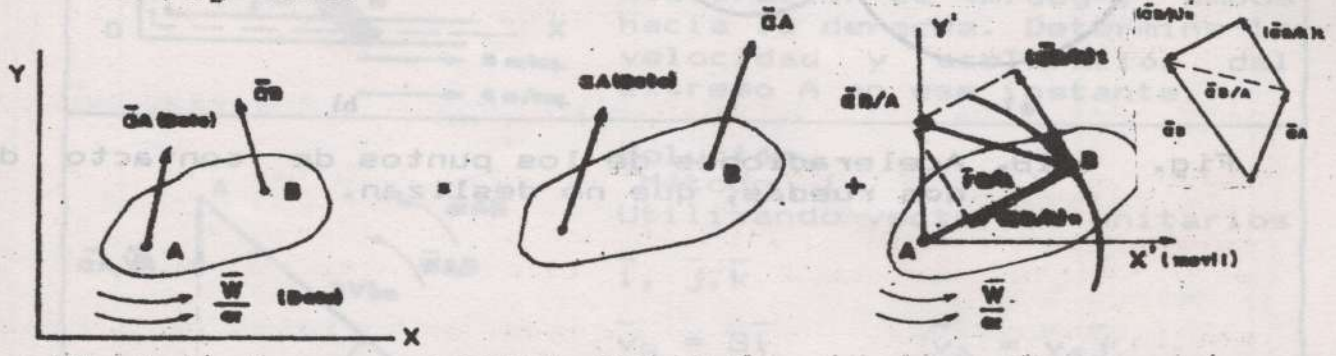
$$(a_{A/B})_n = (r_{B/A})w^2 \qquad (4-21)$$

Como $\bar{w}$ y $\bar{\alpha}$ están dirigidas perpendicularmente al plano del movimiento y son la misma para todo el sólido, entonces $(\bar{a}_{B/A})_t$ es perpendicular al radio AB y $(\bar{a}_{B/A})_n$ siempre actua de B hacia A, fig. 4.16.C. Como este sentido es el mismo que $-\bar{r}_{B/A} = -\bar{r}_{AB}$ y la magnitud de $(a_{B/A})_n = w^2 r_{B/A}$ entonces $(\bar{a}_{B/A})_n = -w^2 . \bar{r}_{B/A}$ y la Ec. (4-19) se puede escribir también como

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\alpha} \times \bar{r}_{B/A} - w^2 . \bar{r}_{B/A} \qquad (4-22)$$

Ecuación que se puede utilizar solo cuando $\bar{w}$ y $\bar{r}$ son perpendiculares entre si.

La representación gráfica de la Ec.(4-19) está indicada en la Fig 4.16.



a)Movimiento general en el plano. b)Traslación con A. c)Rotación alrededor del punto A. d)Diagrama vectorial de aceleraciones.

Fig 4.16. Análisis de las aceleraciones absolutas y relativas del movimiento general en el plano.

En un mecanismo formado por varios miembros unidos por pasadores, se considerá cada miembro como un cuerpo rígido, teniendo en cuenta que en los pasadores la aceleración absoluta será igual para ambos miembros aunque las velocidades y aceleraciones angulares pueden ser diferentes, Fig. 4.17.

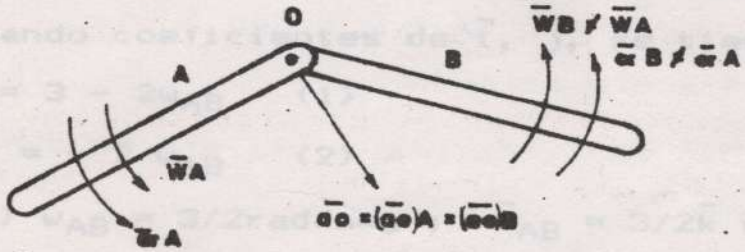


Fig 4.17. Aceleración del pasador común a las dos miembros.

Los puntos de contacto en miembros que estan transitoriamente en contacto, generalmente no tienen la misma aceleración absoluta.Aunque no exista desplazamiento entre sus miembros Fig. 4.18; solamente las aceleraciones tangenciales de los puntos en contacto son iguales, mientras la aceleración normales son diferentes en magnitud y sentido.

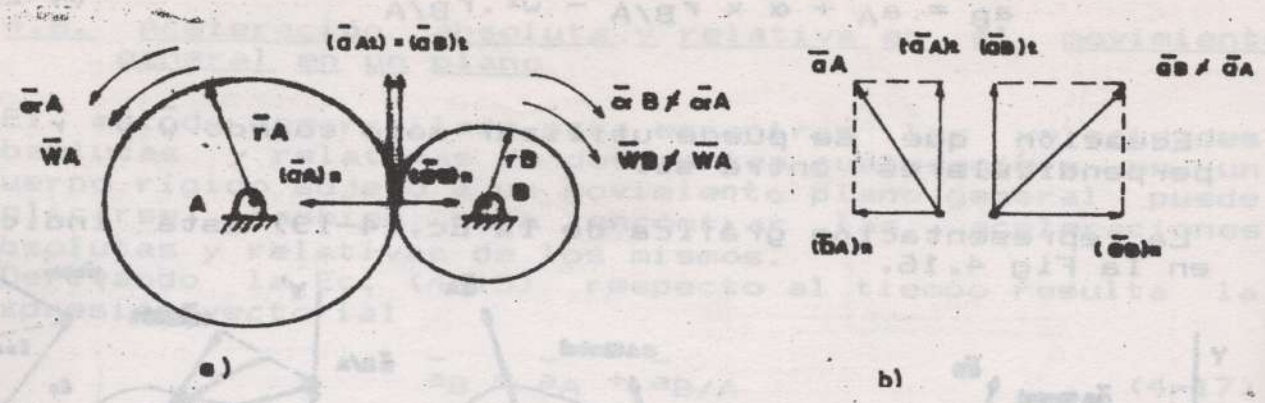
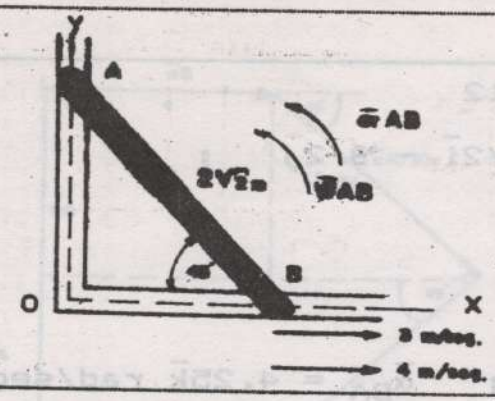
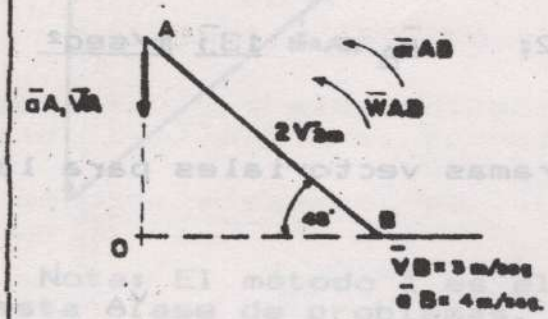


Fig. 4.18. Aceleraciones de los puntos de contacto de dos ruedas, que no deslizan.



Ejemplo. 4.12
Los extremos de la barra AB de longitud $2\sqrt{2}$ metros se mueven según las guías mostradas. Para la posición indicada en la figura, el extremo B tiene una velocidad de 3m/seg y una aceleración de 4m/seg², ambos hacia la derecha. Determine la velocidad y aceleración del extremo A en ese instante.



Solución.
Método 1
Utilizando vectores unitarios $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$

$\bar{v}_B = 3\bar{i}$ $\qquad \bar{v}_A = v_A\bar{j}$

$\bar{a}_B = 4\bar{i}$ $\qquad \bar{a}_A = a_A\bar{j}$

$\bar{w}_{AB} = w_{AB}\bar{k}$ $\qquad \bar{\alpha}_{AB} = \alpha_{AB}\bar{k}$

Cálculo de los velocidades

$$\bar{v}_A = \bar{v}_B + \bar{v}_{A/B} = \bar{v}_B + \bar{w}_{AB} \times (\bar{r}_{AB});$$

pero $\bar{r}_{BA} = (-2\bar{i} + 2\bar{j})$m

$$v_A\bar{j} = 3\bar{i} + w_{AB}\bar{k} \times (-2\bar{i} + 2\bar{j}) = 3\bar{i} - 2w_{AB}\bar{j} - 2w_{AB}\bar{i}$$

Igualando coeficientes de $\bar{i}$, $\bar{j}$, se tiene:

$\bar{i}$) $0 = 3 - 2w_{AB}$ (1)

$\bar{j}$) $v_A = -2\,w_{AB}$ (2)

De (1) $w_{AB} = 3/2$rad/seg ; $\bar{w}_{AB} = 3/2\bar{k}$ rad/seg.

De (2) $v_A = -2(3/2)$m/seg; $\bar{v}_A = -3\bar{j}$ m/seg

Cálculo de las aceleraciones.

$$\bar{a}_A = \bar{a}_B + \bar{a}_{A/B} = \bar{a}_B + \bar{\alpha}_{BA} \times (\bar{r}_{BA}) + \bar{w}_{AB} \times (\bar{w}_{AB} \times \bar{r}_{BA})$$

$$a_A\bar{j} = 4\bar{i} + \alpha_{BA}\bar{k} \times (-2\bar{i} + 2\bar{j}) + (3/2)\bar{k} \times \left[(3/2\bar{k}) \times (-2\bar{i} + 2\bar{j})\right]$$

Continución de la solución 4.12

$\bar{a}_A j = 4\bar{i} - 2\alpha_{BA}\bar{j} - 2\alpha_{BA}\bar{i} + 9/2\bar{i} - 9/2\bar{j}$;

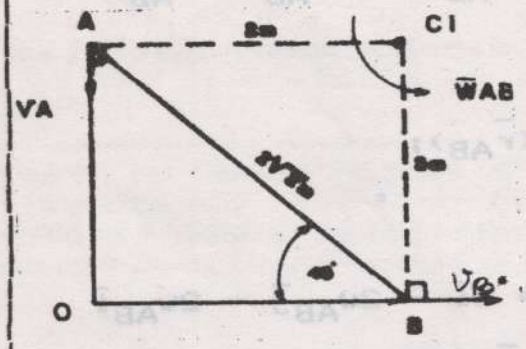
$\bar{i})\ 0 = 4 - 2\alpha_{BA} + 9/2 \quad (3)$

$\bar{j})\ a_A = -2\alpha_{BA} - 9/2 \quad (4)$

De (3); $\alpha_{BA} = 17/4$ rad/seg²; $\bar{\alpha}_{BA} = 4,25\bar{k}$ rad/seg²

De (4); $a_A = -2(17/4) - 9/2$; $\bar{a}_A = -\underline{13\bar{j}\ m/seg^2}$

Método 2
C_I para velocidades y diagramas vectoriales para las aceleraciones.
Cálculo de velocidades.



$v_A = w_{AB}(C_IA)$; $w_{AB} = \dfrac{v_A}{C_IA} =$

$\dfrac{v_B}{C_IB} = \dfrac{3}{2}$

$\bar{w}_{AB} = 3/2$ rad/seg ↻

$v_A = 3/2(C_IA) = 3/2\ (2) = 3$m/seg

$\bar{v}_A = \underline{3\ m/seg}$ ↓

Cálculo de las aceleraciones.

$\bar{a}_A = \bar{a}_B + \bar{a}_{A/B} = \bar{a}_B + (\bar{a}_{A/B})_n + (\bar{a}_{A/B})_t$ de donde

$\bar{a}_B = 4$ m/seg →

$(a_{A/B})_n = w^2_{AB}\, r_{BA} = (3/2)^2(2\sqrt{2}) = (9/2)\sqrt{2}$ m/seg² de A a B

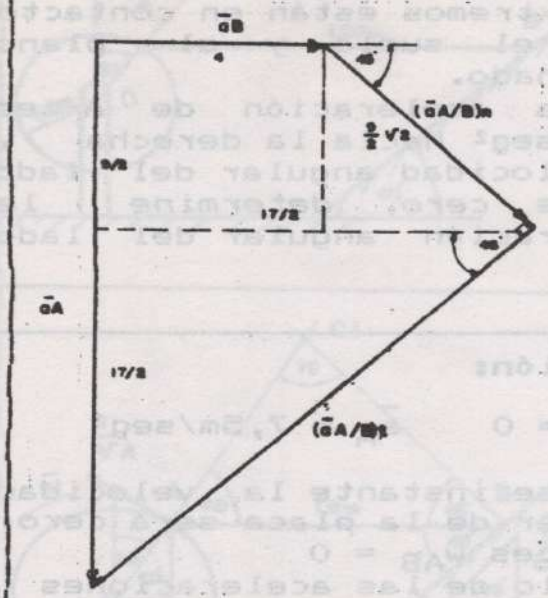
$(a_{A/B})_t = \alpha_{AB}\, r_{AB}$; Perpendicular a AB en el extremo B

$a_A = ?$ vá de A a O

Construyendo el diagrama vectorial se tiene:

$\bar{a}_A = 9/2 + 17/2 = 13$m/seg² ↓

Continuación del ejemplo 4.12



$$(a_{A/B})_t = \frac{17}{2}\sqrt{2}\ m/seg^2$$

$$\bar{\alpha}_{AB} = \frac{(17/2)\sqrt{2}}{2(\sqrt{2})} = \frac{17}{4} =$$

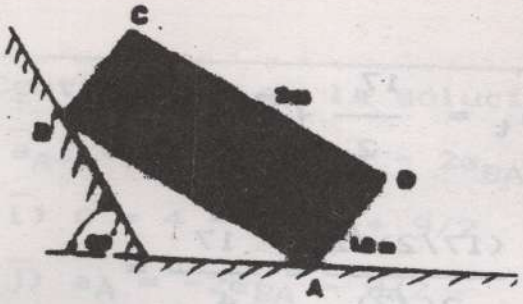
$$4{,}25\ rad/seg^2 \circlearrowleft$$

Por lo tanto

$$\bar{a}_A = -13\bar{j}\ m/seg^2$$

$$\bar{\alpha}_{AB} = 17/4\bar{k}\ rad/seg^2$$

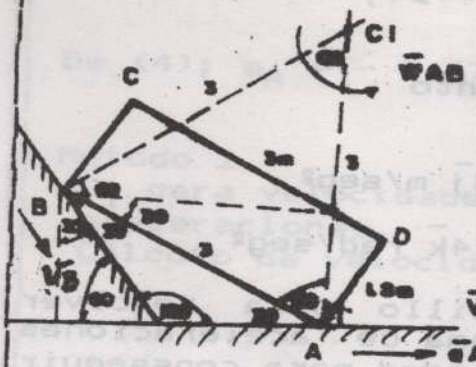
Nota: El método 1 es el mas sencillo para resolver esta clase de problemas. El diagrama de aceleraciones no está a escala debido a la facilidad para consseguir los datos; para casos mas generales es aconsejable el problema con una escala conveniente.



Ejemplo 4.13

La placa rectangular es móvil y según se muestra, sus extremos están en contacto con el suelo y el plano inclinado.

Si la aceleración de A es 7,5m/seg² hacia la derecha y la velocidad angular del lado CD es cero, determine la aceleración angular del lado AB.



Solución:

$w_{CD} = 0 \qquad \bar{a}_A = 7,5 m/seg^2$

En ese instante la velocidad angular de la placa será cero.

Entonces $w_{AB} = 0$

Cálculo de las aceleraciones

$$\bar{a}_A = \bar{a}_B + \bar{a}_{A/B}$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_B + \bar{\alpha}_{AB} \times \bar{r}_{BA} - w^2_{AB}(\bar{r}_{BA})$$

$$7,5\bar{i} = \left(\frac{a_B}{2}\bar{i} - a_B\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{j}\right) + \alpha_{AB}\bar{k} \times \left(3\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{i} - 3\frac{1}{2}\bar{j}\right)$$

$\bar{i})\quad 7,5 = a_B/2 + 3/2\ \alpha_{AB} \qquad (1)$

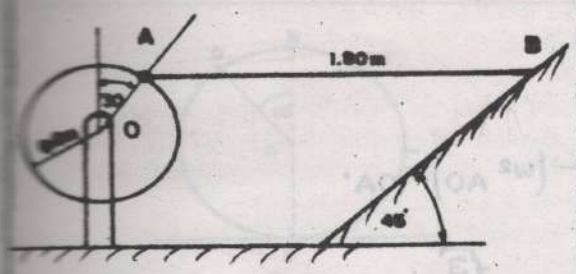
$$\bar{j})\quad 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}a_B + \frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha_{AB} \qquad (2)$$

Multiplicando la (1) por √3 y sumando con (2) se tiene:

$$7,5\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha_{AB} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\alpha_{AB} = 3\sqrt{3}\,\alpha_{AB}$$

$$\alpha_{AB} = \frac{7,5\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 2,5\ rad/seg^2$$

$$\bar{\alpha}_{AB} = 2,5\bar{k}\ rad/seg^2$$

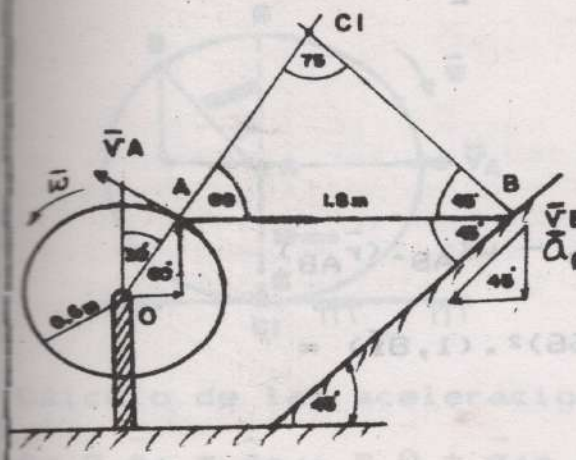


Ejemplo 4.14

En la figura la barra AB es horizontal y el disco tiene una velocidad angular constante de 30 rad/seg, en sentido antihorario. Determine:

a) Velocidad angular de AB y la velocidad de B.

b) Aceleración de B.



$\bar{\omega} = 30 \text{rad/seg}\circlearrowleft = \text{cte};\ \alpha_D = 0$

Cálculo de velocidades

Disco

$$\bar{v}_A = \bar{v}_O + \bar{v}_{A/O} = \bar{w}_{AO} \times (\bar{r}_{OA})$$

$$\bar{v}_A = 30\bar{k} \times 0{,}6\left(\frac{1}{2}\bar{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{j}\right) =$$

$$9\bar{j} - 9\sqrt{3}\bar{i}$$

Barra AB

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{B/A} = \bar{v}_A + \bar{w}_{AB} \times (\bar{r}_{AB}) = -9\sqrt{3}\bar{i} + 9\bar{j} + w_{AB}\bar{k} \times (1{,}8\bar{i})$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} v_B \bar{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} v_B \bar{j} = -9\sqrt{3}\bar{i} + 9\bar{j} + 1{,}8\, w_{AB}\bar{j}$$

$$\bar{i})\quad \frac{-\sqrt{2}}{2} v_B = -9\sqrt{3} \qquad (1) \quad v_B = 9\sqrt{6} = 22{,}05 \text{m/seg}$$

$$j)\quad -\frac{\sqrt{2}}{2} v_B = 9 + 1{,}8\, w_{AB} \qquad (2) \quad \bar{v}_B = -\underline{15{,}6(i + j)\text{m/seg}}$$

En (2) $w_{AB} = -13{,}66$ rad/seg ; $\bar{w}_{AB} = -\underline{13{,}66\bar{k}}$ rad/seg

(Continuación del ejemplo 4.14)

Cálculo de las aceleraciones

Disco

$$\bar{a}_A = \bar{a}_O + \bar{a}_{A/O} = 0 + \bar{\alpha}_{AO} \times \bar{r}_{OA} - (\omega^2_{AO}) \cdot \bar{r}_{OA}$$

$$= 0 + 0 - (30)^2 \cdot \left(0{,}6 \frac{1}{2}\bar{i} + 0{,}6 \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{j}\right)$$

$$\bar{a}_A = (-270\bar{i} - 270\sqrt{3}\bar{j})$$

Barra AB

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{B/A} = \bar{a}_A + \bar{\alpha}_{AB} \times \bar{r}_{AB} - \omega^2_{AB} \cdot (\bar{r}_{AB})$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \alpha_{AB}\bar{k} \times (1{,}8\bar{i}) - (13{,}66)^2 \cdot (1{,}8\bar{i}) =$$

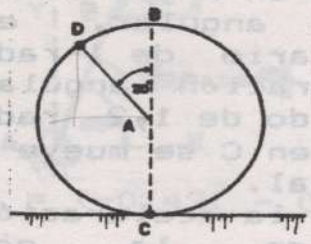
$$\bar{a}_A + 1{,}8\alpha_{AB}\bar{j} - 335{,}87\bar{i}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} a_B \bar{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} a_B \bar{j} = -270\bar{i} - 270\sqrt{3}\bar{j} + 1{,}8\alpha_{AB}\bar{j} - 335{,}87\bar{i}$$

i) $$-\frac{\sqrt{2}}{2} a_B = -270 - 335{,}87 \quad ; \quad a_B = 856{,}84 \text{ m/seg}^2$$

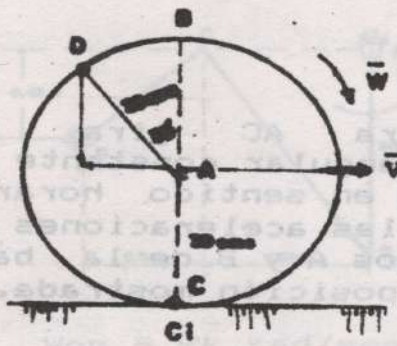
j) $$-\frac{\sqrt{2}}{2} a_B = -270\sqrt{3} + 1{,}8\alpha_{AB} \; ; \quad \alpha_{AB} = -76{,}79 \text{ rad/seg}^2$$

$$\bar{a}_B = -\underline{605{,}87\ (\bar{i} + \bar{j})} \text{ m/seg}^2$$



Ejemplo 4.15

Determínese las aceleraciones de loss puntos C y D de la figura, sabiendo que el disco se mueve hacia la derecha con una velociadad constante de 15m/seg y el diámetro de la rueda es de 60cms.



Solución

v= cte, entonces $a_A = 0$, $\alpha = 0$

$\bar{v}_A = 15\bar{i}$ m/seg

Cálculo de las velocidades

$$v_A = w.r; \quad w = \frac{v_A}{r} = \frac{15}{0,3} = 50 \text{ rad/seg}$$

$\bar{w} = 50$ rad/seg)

Cálculo de las aceleraciones

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{C/A} = 0 + \bar{\alpha}_{AC} \times \bar{r}_{AC} - w^2_{AC} \cdot \bar{r}_{AC_I} =$$

$$-(50)^2 . (-0,30\bar{j}) \text{ m/seg}^2$$

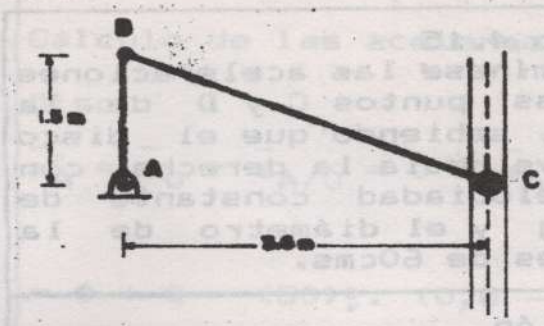
$$\bar{a}_C = \underline{750\bar{j} \text{ m/seg}^2}$$

$$\bar{a}_D = \bar{a}_A + \bar{a}_{D/A} = 0 + 0 - w^2_{AD} \cdot (\bar{r}_{AD}) =$$

$$- (50)^2 \left(- \frac{1}{2}\bar{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j}\right) 0,30\text{m}$$

$$\bar{a}_D = \underline{(375\bar{i} - 530,33\bar{j}) \text{m/seg}^2}$$

4.41

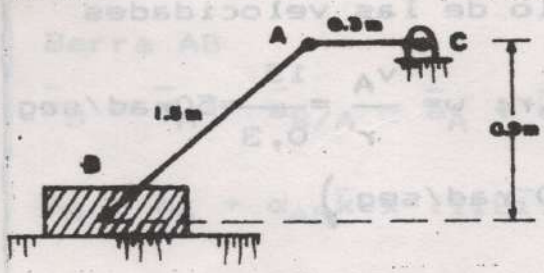


Las barras AB y BC, articuladas en A y B tienen una velocidad angular, en el sentido horario de 1 rad/seg y una aceleración angular de igual sentido de 1,2 rad/seg². El rodillo en C se mueve en una guía vertical.

Determine la aceleración del rodillo en la pósición mostrada.

R: $\bar{a}_C = 4{,}32\bar{j}$ m/seg²

4.42

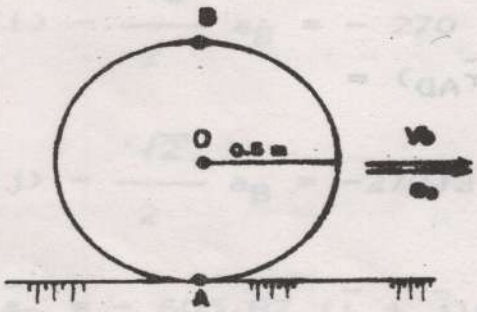


La barra AC gira con velocidad angular constante de 10 rad/seg en sentido horario. Determine las aceleraciones de los extremos A y B de la barra AB, en la posición mostrada.

R: $\bar{a}_A = 30\bar{i}$ m/seg²

$\bar{a}_B = 41{,}72\bar{i}$ m/seg²

4.43

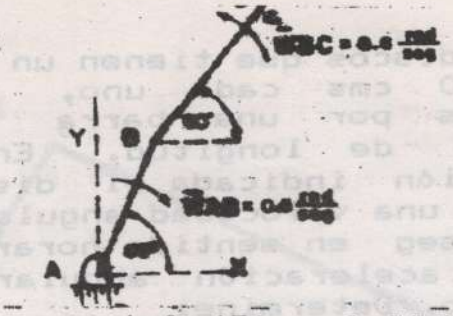


Un disco de 0,5 metros de radio rueda sin deslizar sobre la *superficie. Determine* las aceleraciones de los puntos A y B para $\bar{v}_O = 20\bar{i}$ m/seg y $\bar{a}_O = 3\bar{i}$ m/seg²

R: $\bar{a}_A = 800\bar{j}$ m/seg²

$\bar{a}_B = (6\bar{i} - 800\bar{j})$ m/seg²

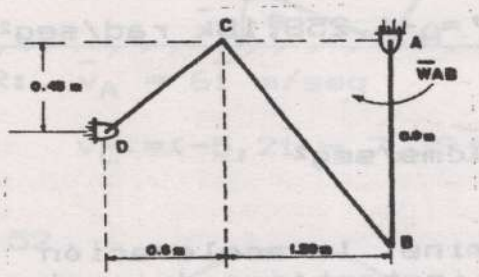
4.44



Las barras AB = 1 metro y BC = 1,2m, están articuladas en A y B. Determine la aceleración del extremo C para velocidades angulares constantes dadas.

R: $\bar{a}_C = (-0,43\bar{i} - 0,92\bar{j})$ m/seg²

4.45

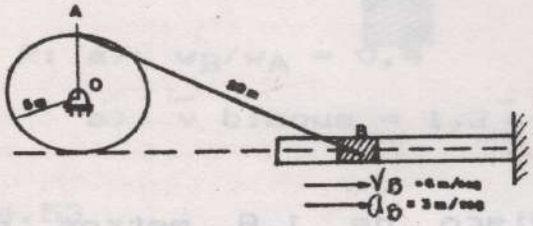


La velocidad angular de la barra AB es 2rad/seg en sentido horario y está aumentando a razón de 4rad/seg². Determine la velocidad angular de la barra CD y la aceleración angular de la barra BC.

R: $\bar{w}_{CD} = 2\bar{k}$ rad/seg

$\bar{\alpha}_{BC} = 1,875\bar{k}$ rad/seg²

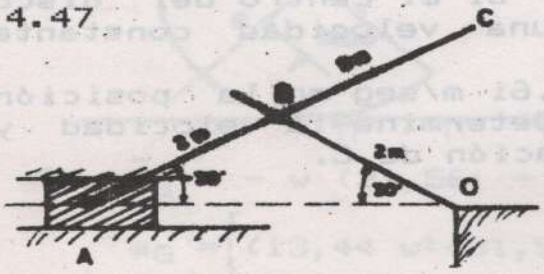
4.46



El bloque B se desliza hacia la derecha con una velocidad y aceleración dadas, en la posición mostrada. Determine la aceleración angular de la rueda en dicho instante asumiendo que el pasador en A está sobre la periferia de la rueda.

R: $\bar{\alpha} = 0,24\bar{k}$ rad/seg²

4.47

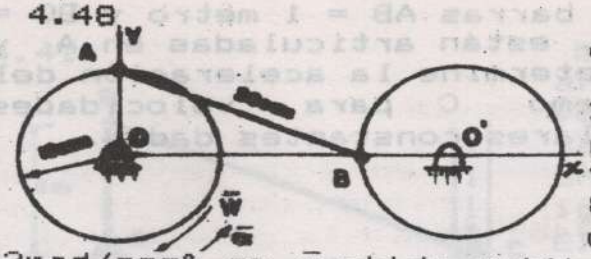


Determine la velocidad de A y C, la aceleración absoluta de A y la aceleración angular de la barra AC. La velocidad angular de la barra OB es constante e igual a 4rad/seg; en el sentido horario.

R: $\bar{v}_A = 8\bar{i}$ m/seg ; $\bar{v}_C = 8\sqrt{3}\bar{j}$ m/seg

$\bar{\alpha}_{AC} = 0$(rad/seg²) ; $\bar{a}_A = 32\sqrt{3}\bar{i}$ m/seg²

4.48



Dos discos que tienen un radio de 10 cms cada uno, están unidos por una barra AB, de 26cms de longitud. En la posición indicada el disco O tiene una velocidad angular de 8rad/seg en sentido horario y una aceleración angular de 2rad/seg² en sentido antihorario. Determine:

a) La velocidad y aceleración angular del disco O'

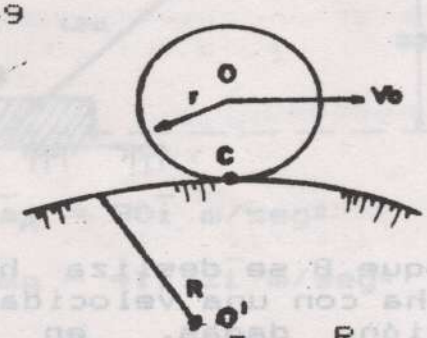
b) La velocidad y aceleración de B.

R: a) $\bar{w}_{O'} = 19,2\bar{k}$ rad/seg ; $\bar{\alpha}_{O'} = -1.258,18\bar{k}$ rad/seg²

b) $\bar{v}_B = -192\bar{j}$ cms/seg;

$\bar{a}_B = (3,684,4\bar{i} + 12.581,8\bar{j})$ cms/seg²

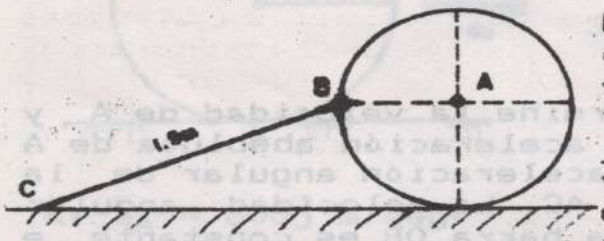
4.49



Determine la aceleración del centro instantáneo de rotación C del disco que rueda sobre la superficie circular, siendo v_o la rapidez constante de su centro O.

R: $\bar{a}_C = v_o^2 \left[\frac{R}{r(r+R)} \right] \uparrow$

4.50

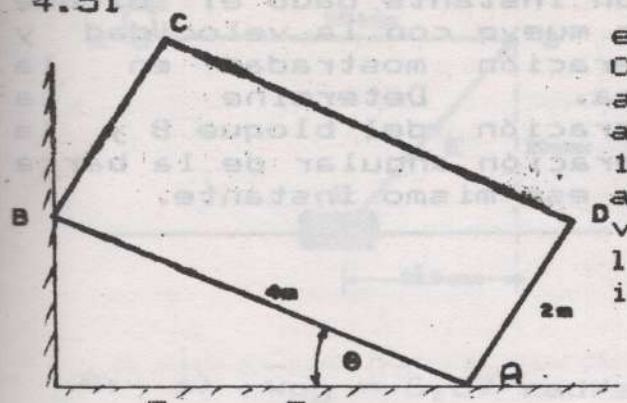


Un disco de 1,8 metros de diámetro rueda sin resbalar. Una barra BC está articulada al borde del disco en B y su otro extremo C se arrastra sobre el suelo. Si el centro del disco tiene una velocidad constante $\bar{v}_A = 3,6\bar{i}$ m/seg en la posición dada. Determine la velocidad y aceleración de C.

R: $\bar{v}_C = 6,3\bar{i}$ m/seg

$\bar{a}_C = 31,28\bar{i}$ m/seg²

4.51

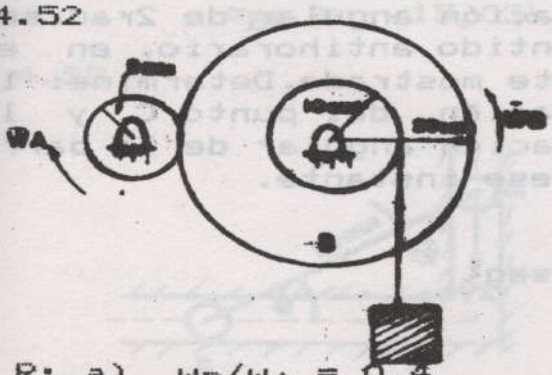


Una caja resbala por sus extremos sobre una pared. Cuando $\theta = 30°$ la velocidad angular es de 3 rad/seg y su aceleración angular es de 1rad/seg², ambas en sentido antihorario. Determine las velocidades y aceleraciones de los extremos A y C en ese instante.

R: $\bar{v}_A = 6\bar{i}$ m/seg $\qquad \bar{a}_A = -29,18\bar{i}$ m/seg²

$\bar{v}_C = (-5,2\bar{i} - 7,39\bar{j})$ m/seg ; $\bar{a}_C = (-10,73\bar{i} - 36,05\bar{j})$ m/seg²

4.52



La rueda dentada B está girando con una velocidad angular w_B haciendo girar la rueda dentada A. Determine:
a) la relación w_B/w_A de los engranajes
b) La velocidad del bloque cuando $w_A = 30$ rad/seg.

R: a) $w_B/w_A = 0,4$

b) $\bar{v}$ bloque $= 1,2\bar{j}$ m/seg

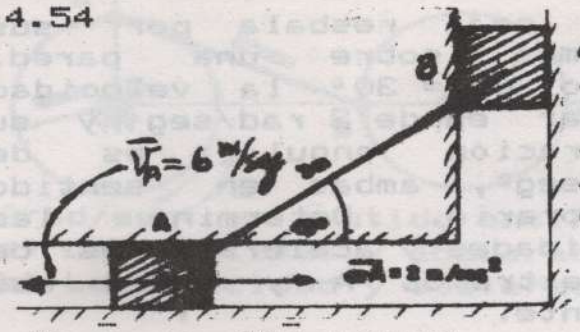
4.53

El cilindro circular rueda sin deslizar. Cuando $\theta = 45°$ la velocidad angular es w y la aceleración angular es α, ambas en sentido antihorario. Determine la velocidad y aceleración del centroide G para ese instante.

R: $\bar{v}_G = -w\,(31,56\bar{i} + 13,44\bar{j})$ cms/seg

$\bar{a}_G = \left[(13,44\,w^2 - 31,56\alpha)\bar{i} + 13,44(w^2 - \alpha)\bar{j}\right]$ cms/seg²

4.54

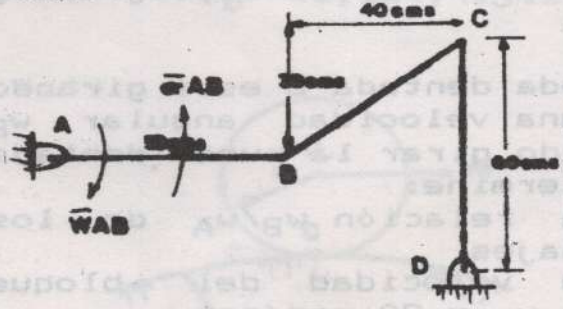


En un instante dado el bloque A se mueve con la velocidad y aceleración mostradas en la figura. Determine la aceleración del bloque B y la aceleración angular de la barra AB en ese mismo instante.

R: $\bar{a}_B = -32\bar{j}$ m/seg²

$\bar{\alpha}_{AB} = -7,07\,\bar{k}$ rad/seg²

4.55

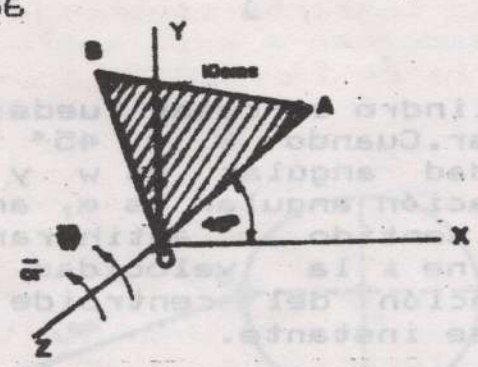


La barra AB tiene una velocidad angular de 0,5rad/seg en sentido horario y una aceleración angular de 2rad/seg² en sentido antihorario, en el instante mostrado. Determine: la aceleración del punto C y la aceleración angular de la barra CD en ese instante.

R: $\bar{a}_C = (-42,6\bar{i} - 5,77\bar{j})$ cms/seg²

$\bar{\alpha}_{DC} = -0,71\bar{k}$ rad/seg²

4.56



La placa AOB en forma de triángulo equilatero, gira en su propio plano xy alrededor de un eje que pasa por O con una w= 5rad/seg y una α = 1rad/seg² ambas en sentido antihorario. Determine las velocidades y aceleraqciones de los vértices A yB en el instante considerado

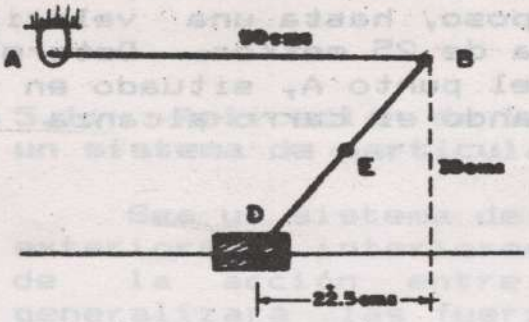
R: $\bar{v}_A = (-25\sqrt{2}\bar{i} + 25\sqrt{2}\bar{j})$ cms/seg

$\bar{v}_B = (-48,30\bar{i} - 12,94\bar{j})$cms/seg

$\bar{a}_A = (-130\sqrt{2}\bar{i} - 120\sqrt{2}\bar{j})$cms/seg²

$\bar{a}_B = (55,04\bar{i} - 244,09\bar{j})$cms/seg²

4.57



Si la velocidad angular de la barra AB es 3rad/seg en sentido horario, en el instante indicado. Determine:

a) Velocidad angular de BD

b) Velocidad del punto medio E de BD.

c) Si a_D = 100cms/seg² hacia la derecha, calcule las aceleraciones angulares de las barras AB y BD.

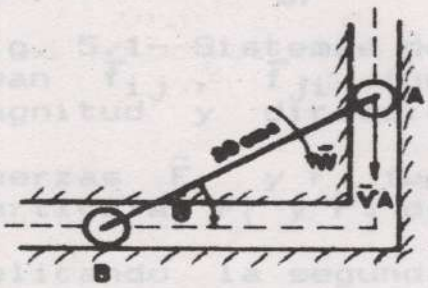
R: a) $\bar{w}_{BD} = 6,67$ rad/seg ↻

b) $\bar{v}_E = 125,06$ cms/seg ∠36,9°

c) $\bar{\alpha}_{AB} = -33,46\bar{k}$ rad/seg² ;

$\bar{\alpha}_{BD} = -15,03\bar{k}$ rad/seg²

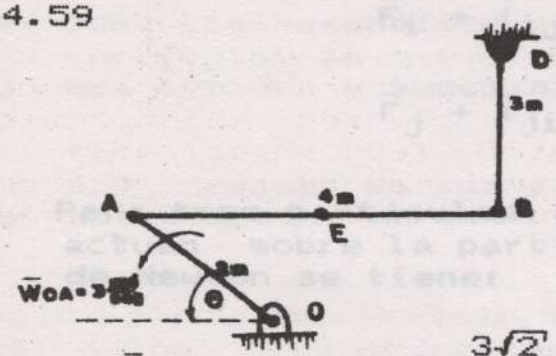
4.58



Para la figura mostrada, determine la aceleración del extremo B y la aceleración angular de la barra AB cuando θ = 30° si el extremo A tiene una velocidad constante hacia abajo de 2 m/seg y la velocidad angular de la barra AB es 12rad/seg en sentido horario.

R: $\bar{a}_B = -33,28\bar{i}$ m/seg² ; $\bar{\alpha}_{AB} = -83,14$rad/seg² ↻

4.59



La barra OA gira en sentido antihorario con velocidad angular constante de 3rad/seg. Para θ = 45° en la posición mostrada, determine: la velocidad del punto medio E de la barra AB, así como $\bar{v}_B$, $\bar{w}_{DB}$ y $\bar{\alpha}_{DB}$.

R: $\bar{v}_E = (-3\sqrt{2}\bar{i} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\bar{j})$ m/seg

$\bar{v}_B = -3\sqrt{2}\bar{i}$ m/seg

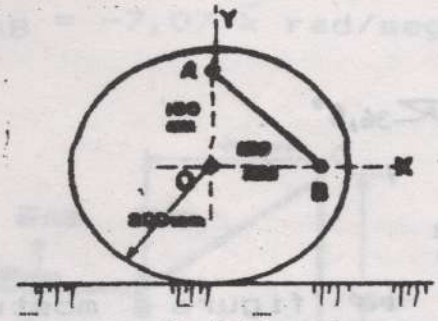
$\bar{w}_{DB} = -\sqrt{2}\bar{k}$ rad/seg

$\bar{\alpha}_{DB} = 2,74\bar{k}$ rad/seg²

4.60. Un carro con llantas de 800mm de diámentro, acelera en forma constante, desde el reposo, hasta una velocidad de 60 kms/hora, en una distancia de 25 metros. Determine la magnitud de la aceleración del punto A, situado en la parte superior de la rueda, cuando el carro alcanza una velocidad de 10 kms/hora.

R: $a_A = 22,24\ m/seg^2$

4.61



El disco circular rueda a la izquierda sin deslizar.

$\bar{a}_{A/B} = -3.\bar{j}\ m/seg^2$, determine *la velocidad y la aceleración* del centro O del disco

R: $\bar{v}_O = -0,64\bar{i}\ m/seg$

$\bar{a}_O = -2,02\bar{i}\ m/seg^2$

CAPITULO 5

5.1.- Aplicación de las leyes de Newton al movimiento de un sistema de partículas- Fuerzas efectivas

Sea un sistema de n partículas, sometidas a fuerzas exteriores e interiores, de las cuales se hará un estudio de la acción entre dos y tres partículas y se generalizará las fuerzas que actuan sobre un sistema de dos y tres partícula se describe en la Fig. 5.1.

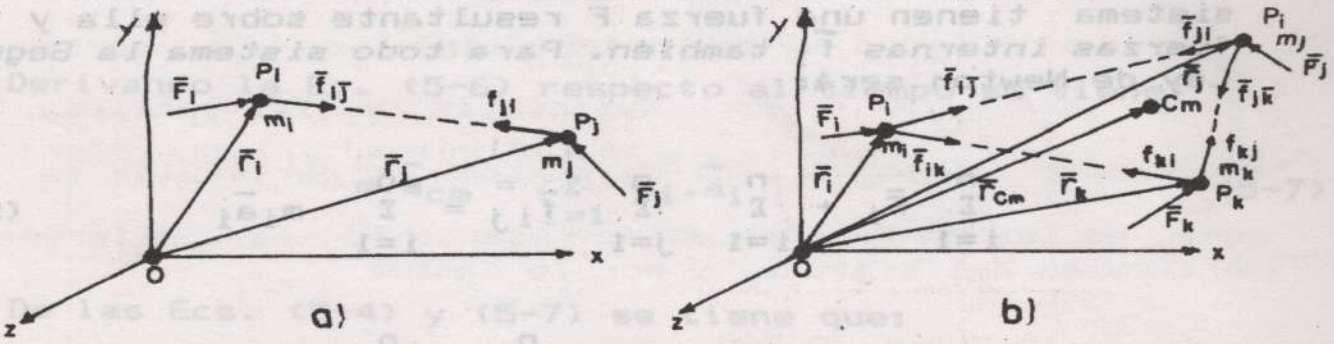


Fig. 5.1- Sistemas de partículas de dos y tres partículas Sean $\bar{f}_{ij}$, $\bar{f}_{ji}$ fuerzas internas, colineales, de igual magnitud y dirección pero en sentido contrarias y las fuerzas $\bar{F}_i$ y $\bar{F}_j$ fuerzas externas que actuan sobre las particulas P_i y P_j de masas m_i y m_j Fig. 5.1.a.

Aplicando la segunda Ley de Newton a la partículas P_i y P_j entonces:

$$\bar{F}_i + \bar{f}_{ij} = m_i \bar{a}_i \qquad (5-1)$$

$$\bar{F}_j + \bar{f}_{ji} = m_j \bar{a}_j \qquad (5-1.a)$$

Para tres partículas, Fig. 5.1.b, sumando las fuerzas que actuan sobre la partícula P_i y aplicando la segunda Ley de Newton se tiene:

$$\bar{F}_i + \bar{f}_{ij} + \bar{f}_{ik} = m_i \bar{a}_i \qquad (5-1.b)$$

Para un sistema de n partículas, la Ec (5-1) aplicada a la partícula P_i es:

$$\bar{F}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \bar{f}_{ij} = m_i \bar{a}_i \qquad (5-2)$$

La Ec.(5-1.a) para la partícula P_j es: $\bar{F}_j + \sum_{i=1}^{n} \bar{f}_{ji} = m_j \bar{a}_j$

Ejemplo si i=2 y n=5, entonces $\sum_{j=1}^{n=5} f_{ij} = \bar{f}_{2,1} + \bar{f}_{2,3} + \bar{f}_{2,4} + f_{2,5}$ para Ec. (5-2).

En general, cada partícula de las n partículas, en el sistema tienen una fuerza $\bar{F}$ resultante sobre ella y n-1 fuerzas internas $\bar{f}_1$ también. Para todo sistema la Segunda Ley de Newton será:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \bar{f}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{a}_i \qquad (5\text{-}3)$$

como $\bar{f}_{ij} = -\bar{f}_{ji}$, entonces $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \bar{f}_{ij} = 0$ de ésta forma la ecuación final del sistema es:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{a}_i \qquad (5\text{-}4)$$

donde $\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = \bar{F}$ resultante de todas las fuerzas externas que actuan sobre el sistema y $m_i.\bar{a}_i$ son las fuerzas efectivas del sistema.

5.2 Movimiento del centro de masa de un sistema de partículas.

Propiedades importantes del sistema de partículas son la posición, velocidad y aceleración del centro de masa total, C_m.

En la Fig. 5.1.b, para un sistema de n partículas con masa total m, se tiene por definición de centro de masa que:

$$(m)\bar{r}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i \qquad (5\text{-}5)$$

donde $\bar{r}_{cm}$ es el vector de posición del centro de masa y $m = \sum_{i=1}^{n} m_i = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n$ es la masa total del sistema y $\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i = m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 + m_3 \bar{r}_3 + \cdots + m_n \bar{r}_n$

Derivando la Ec. (5-5) respecto al tiempo se tiene:

$$m \cdot \bar{v}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \bar{v}_i \qquad (5-6)$$

Derivando la Ec. (5-6) respecto al tiempo se tiene:

$$m \cdot \bar{a}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \bar{a}_i \qquad (5-7)$$

De las Ecs. (5-4) y (5-7) se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = m \cdot \bar{a}_{cm} \qquad (5-8)$$

siendo $\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i$ la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema de partículas, m la masa total del sistema y $\bar{a}_{cm}$ la aceleración del centro de masa.

Conclusión: El centro de masa de un sistema de partículas se mueve como si la masa total y la resultante del sistema estuvieran concentrados en ese punto.

5.3 Momento de las fuerzas aplicadas sobre un sistema de partículas.

El momento de las fuerzas externas e internas, que actuan sobre la particula Pi, con respecto al punto O en la Fig. 5.1.a es: $\bar{r}_i \times \bar{F}_i + \bar{r}_i \times \bar{f}_{ij} = \bar{r}_i \times m_i \bar{a}_i$, y para el sistema de n partículas es:

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\bar{r}_i \times \bar{f}_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i \times m_i \bar{a}_i) \qquad (5-9)$$

como $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\bar{r}_i \times \bar{f}_{ij}) = 0$ entonces la Ec. (5-9) se escribe en la forma:

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) + \sum_{i=1}^{n} (\bar{M}_i)_O = \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i \times m_i \bar{a}_i) \qquad (5-10)$$

5.4.- Cantidad de movimiento lineal y angular de un sistema de partículas.

La cantidad de movimiento lineal de una partícula P_i es $\bar{L}_i = m_i . \bar{v}_i$ por definición y la cantidad de movimiento lineal $\bar{L}$ para un sistema de partículas es la suma de las cantidades de movimiento de las diferentes partículas del sistema, y por lo tanto:

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i \qquad (5-11)$$

Reemplazando la Ec. (5-6) en la ec. (5-11) se tiene:

$$\bar{L} = m \bar{v}_{cm} \qquad (5-11a)$$

Esta ecuación es válida si la masa del sistema es constante. Derivando la Ec. (5-11) respecto al tiempo se tiene:

$$\dot{\bar{L}} = m\bar{a}_c \qquad (5-12)$$

De la Ec. (5-8) se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = \dot{\bar{L}} \qquad (5-13)$$

Conclusión: La resultante de la fuerzas externas aplicadas a un sistema de partículas es igual a la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento lineal del sistema.

La cantidad de movimiento angular $\bar{H}_O$ con respecto al punto O del sistema de partículas, en la Fig. 5.2 es:

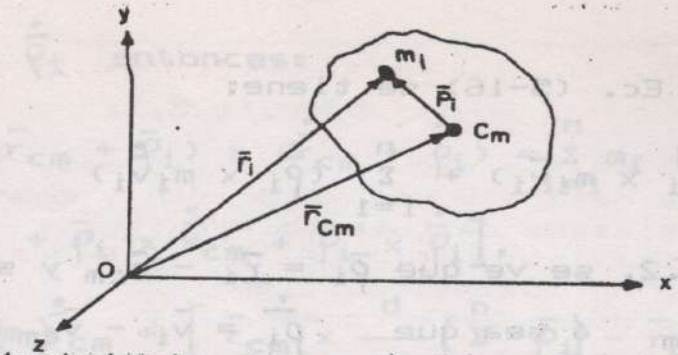


Fig. 5.2 Movimiento de un sistema de partículas respecto al sistema fijo de referencia.

$$\bar{H}_O = \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i) \qquad (5-14)$$

Derivando la ec. (5-14) respecto al tiempo se tiene:

$$\dot{\bar{H}}_O = \sum_{i=1}^{n} (\dot{\bar{r}}_i \times m_i \bar{v}_i) + \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i \times m_i \dot{\bar{v}}_i)$$ de donde

$$\dot{\bar{H}}_O = \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i \times m_i \bar{a}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i \times \bar{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_O$$ ya que

$\sum_{i=1}^{n} (\dot{\bar{r}}_i \times m_i \bar{v}_i) = 0$; por ser producto vectorial de dos vectores colineales. Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{M}_O = \dot{\bar{H}}_O \qquad (5-15)$$

Conclusión: La resultante de los momentos de las fuerzas aplicadas a un sistema de partículas, con respecto al punto O, es igual a la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento angular de todo el sistema, considerando constante la masa del sistema. La Ec. (5-15) no es válida si la masa total del sistema varía con el tiempo.

La Ec. (5-15) también es válida cuando se suman los momentos de las fuerzas externas que actuan sobre el sistema de partículas con respecto al centro de masa c_m, relacionando entonces la suma de los momentos $\Sigma \bar{M}_{cm}$ con la cantidad de movimiento angular $\bar{H}_{cm}$. Fig. 5.2.

La cantidad de movimiento angular respecto a c_m es:

$$\bar{H}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} (\bar{\rho}_i \times m_i \bar{v}_i) \qquad (5-16)$$

Derivando la Ec. (5-16) se tiene:

$$\dot{\bar{H}}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} (\dot{\bar{\rho}}_i \times m_i \bar{v}_i) + \sum_{i=1}^{n} (\bar{\rho}_i \times m_i \dot{\bar{v}}_i)$$

En la Fig. 5.2. se ve que $\bar{\rho}_i = \bar{r}_i - \bar{r}_{cm}$ y su derivada es:

$\dot{\bar{\rho}}_i = \dot{\bar{r}}_i - \dot{\bar{r}}_{cm}$ ó sea que $\dot{\bar{\rho}}_i = \bar{v}_i - \bar{v}_{cm}$

Reemplazando en $\dot{\bar{H}}_{cm}$ se obtiene que:

$$\dot{\bar{H}}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} (\dot{\bar{r}}_i \times m_i \bar{v}_i) - \sum_{i=1}^{n} (\dot{\bar{r}}_{cm} \times m_i \bar{v}_i) + \sum_{i=1}^{n} (\bar{\rho}_i \times m_i . \bar{a}_i) \qquad (5-17)$$

El primer término de la Ec. (5-17) es nulo, por ser producto de dos vectores colineales. El segundo término se anula al colocarlo en la forma:

$$-\dot{\bar{r}}_{cm} \times \frac{d}{dt}\left(\sum m_i \bar{r}_i\right) = -\dot{\bar{r}}_{cm} \times \frac{d}{dt}(m \bar{r}_{cm}) = -\dot{\bar{r}}_{cm} \times m\dot{\bar{r}}_{cm} = 0$$

siendo m = masa total del sistema de partículas.

Por lo tanto:

$$\dot{\bar{H}}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} (\bar{\rho}_i \times m_i \bar{a}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\bar{\rho}_i \times \bar{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_{cm}$$

se puede escribir como:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{M}_{cm} = \dot{\bar{H}}_{cm} \qquad (5-18)$$

lo que indica que la suma de momentos puede tomarse siempre respecto al centro de masa, independientemente del movimiento. La Ec. (5-18) es también importante en la Mecánica del cuerpo rígido.

5.5.- Cálculo de la cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas con respecto a un origen inercial.

En la Fig. 5.2 la cantidad de movimiento angular del sistema de partículas, respecto a O, es

$$\bar{H}_O = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i . \dot{\bar{r}}_i$$ y como $\bar{r}_i = \bar{r}_{cm} + \bar{\rho}_i$ y su derivada

es $\dot{\bar{r}}_i = \dot{\bar{r}}_{cm} + \dot{\bar{\rho}}_i$ entonces:

$$\bar{H}_O = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (\bar{r}_{cm} + \bar{\rho}_i) \times (\dot{\bar{r}}_{cm} + \dot{\bar{\rho}}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\bar{r}_{cm} \times \dot{\bar{r}}_{cm} + \bar{r}_{cm} \times \dot{\bar{\rho}}_i + \bar{\rho}_i \times \dot{\bar{r}}_{cm} + \bar{\rho}_i \times \dot{\bar{\rho}}_i\right],$$

$$\text{y } \bar{H}_O = \bar{r}_{cm} \times (m_T)\dot{\bar{r}}_{cm} + \left[\bar{r}_{cm} \times \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i\right) - \bar{r}_{cm} \times \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{\rho}_i\right] + \sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}_i \times m_i \cdot \dot{\bar{\rho}}_i \qquad (5\text{-}19)$$

Los términos dentro del corchete de la Ec.(5-16) son nulos, por definición del centro de masa y el último término es la cantidad de movimiento angular respecto al centro de masa, entonces la Ec. (5-16) se puede escribir como:

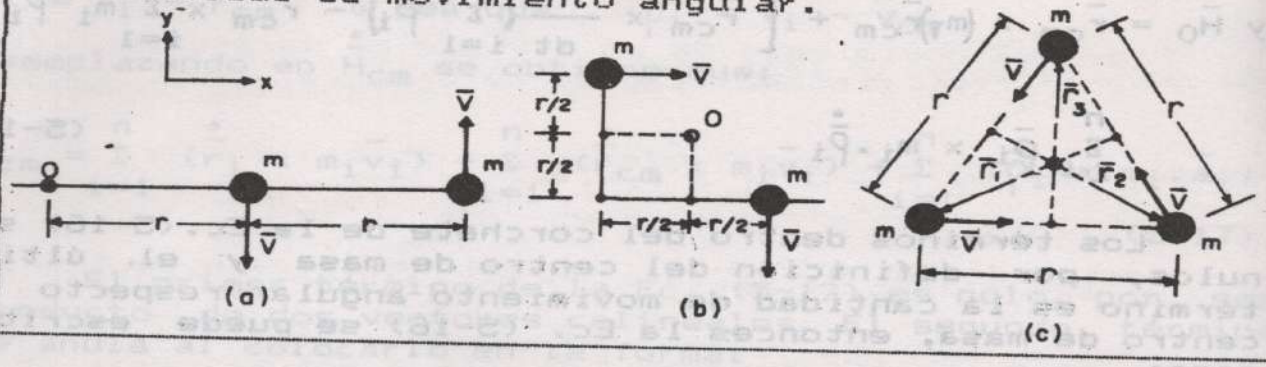
$$\bar{H}_O = \bar{r}_{cm} \times m_T \bar{v}_{cm} + \bar{H}_{cm} \qquad (5\text{-}20)$$

Conclusión: La cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas con respecto a un origen inercial O se puede expresar como la suma del momento de la cantidad de movimiento de una partícula con una masa igual a la masa total del sistema y con velocidad igual a la del centro de masa del sistema, más la cantidad de movimiento angular del sistema relativo al centro de masa.

Ejemplo 5.1.

En cada uno de los siguientes sistemas, las partícula tienen una masa m y una velocidad v como se indica. Para cada sistema calcule lo siguiente:

1) Cantidad de movimiento lineal.
2) Cantidad de movimiento angular.

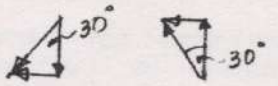


Solución.

1) a) $\bar{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i = mv\bar{j} + m(-v\bar{j}) = 0$

b) $\bar{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i = m(v\bar{i}) + m(-v\bar{j}) = mv(\bar{i} - \bar{j})$

c) $\bar{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i = m(v\bar{i}) + m\left[v - \tfrac{1}{2}\bar{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{j}\right] +$

$+ mv\left[-\tfrac{1}{2}\bar{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0\right]$ 

2) a) $\bar{H}_O = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i$

$\bar{H}_O = 2r\bar{i} \times mv\bar{j} + r\bar{i} \times m(-v\bar{j}) = 2rmv\bar{k} - rmv\bar{k} = rmv\bar{k}$

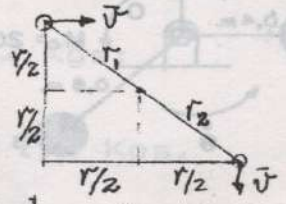
b) $\bar{H}_O = \sum_{i=1}^{n} \bar{r} \times m\bar{v}$

Continuación Ejemplo 5.1.

$$\bar{H}_O = r/2\,(-\bar{i} + \bar{j}) \times mv\bar{i} + r/2\,(\bar{i} - \bar{j})\, m\,(-v\bar{j})$$

$$= -\,mv(r/2)\bar{k} - mv\,(r/2)\,\bar{k}$$

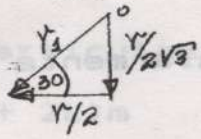
$$\bar{H}_O = -\,rmv\bar{k}$$



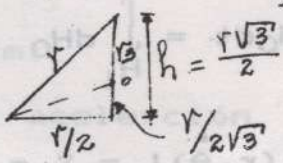
c) $$\bar{H}_O = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_x\, m\bar{v} = \frac{r}{2}\left(-\,i - \frac{1}{\sqrt{3}}\,j\right) \times mv\bar{i} +$$

$$\frac{r}{2}\left(\bar{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\bar{j}\right) \times mv\left(-\tfrac{1}{2}\,\bar{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\bar{j}\right)$$

$$+ \frac{r\bar{j}}{\sqrt{3}} \times mv\left(-\tfrac{1}{2}\,\bar{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\bar{j}\right)$$



$$\bar{H}_O = \frac{\sqrt{3}}{2}\,rmv\bar{k}$$

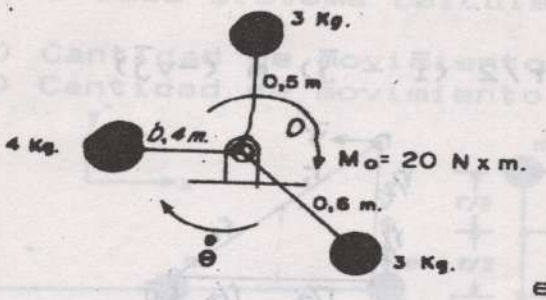


$$h = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

$$r_3 = \frac{r\sqrt{3}}{2} - \frac{r}{2\sqrt{3}}$$

$$r_3 = r/\sqrt{3}$$

Ejemplo 5.2.



Tres esferas están soldadas a una estructura rígida que rota en un plano horizontal respecto a un eje vertical que pasa por O, con una velocidad angular $\dot{\theta} = 20$ rad/seg. Si un momento $M_O = 20$ Nxm es aplicado a la estructura durante 5 seg, encuentre la nueva velocidad angular $\dot{\theta}'$.

Solución:

$$\Sigma \bar{M}_O = \dot{\bar{H}}_O \quad \frac{d\bar{H}_O}{dt}$$

Escalarmente sería, $\Sigma M_O = \dfrac{dH_O}{dt}$; ó $\Sigma M_O dt = dH_O$

integrando $\int_{H_1}^{H_2} \Sigma M_O dt = \int_{H_1}^{H_2} dH_O$; $\Sigma M_O \int_0^5 dt = H_O$

$M_O(t) = |\Sigma m_i \, r_i (r_i \dot{\theta})| = \Sigma \, m_i \, r^2{}_1 \, \Delta \dot{\theta}$ ya que $v_O = r\dot{\theta}$

pero $\Delta \dot{\theta} = (\dot{\theta}' - 20)$, de esta forma

$Mot = \Sigma m_i r_i^2 (\dot{\theta}' - 20)$ reemplazando valores se tiene

$20 \times (5) = [3(0,5)^2 + 3(0,6)^2 + 4(0,4)^2] (\dot{\theta}' - 20$

$100 = 2,47 (\dot{\theta}' - 20)$; $\dot{\theta}' = 60,49$ rad/seg.

Problemas/secs; (5.1; 5.2; 5.3; 5.4; 5.5).

5.1.- Los vectores de posición y masas de las tres partículas siguientes, son respectivamente

$\bar{r}_1 = (0,5\bar{i} + 0,8\bar{j})m$; $m_1 = 1$ Kgs:

$\bar{r}_2 = (0,9\bar{i} - 0,4\bar{j})m$; $m_2 = 2$ Kgs;

$\bar{r}_3 = (2\bar{i} + 0,7\bar{j})m$; $m_3 = 1,5$ Kgs.

$\bar{v}_3 = \bar{6}i$ m/seg. Determine el vector de posición y velocidad del centro de masa.

R: $\bar{r}_c = (1,18\bar{i} + 0,23\bar{j})$ m ; $\bar{v}_c = 2\bar{i}$ m/seg

5.2.- Los vectores de posición de tres partículas son:

$\bar{r}_1 = (2\bar{j} + 2\bar{k})m$; $\bar{r}_2 = (3\bar{i} + 2,5\bar{j} + 2\bar{k})m$ y

$\bar{r}_3 = (4\bar{i} - 0,6\bar{j} - 2\bar{k})m$.

La partícula 2 tiene una acelerción $\bar{a}_2 = -8\bar{j}$ m/seg²

Determine los vectores de posición y acelración del centro de masa si sus pesos son 5, 15 y 20 Newtons respectivamente.

R: $\bar{r}_c = (3,13\bar{i} + 0,89\bar{j})m$; $\bar{a}_c = -3\bar{j}$ m/seg².

5.3.- Calcule la velocidad del centro de masa de tres partículas iguales de masa 2 Kgs. y cuyas velocidades son respectivamente:

$\bar{v}_1 = 5\bar{i}$ m/seg ; $\bar{v}_2 = (-10\bar{j} - 3\bar{k})$m/seg

$\bar{v}_3 = (-2\bar{i} + 6\bar{k})$m/seg.

R: $\bar{v}_c = (\bar{i} - 3,33\bar{j} + \bar{k})$ m/seg

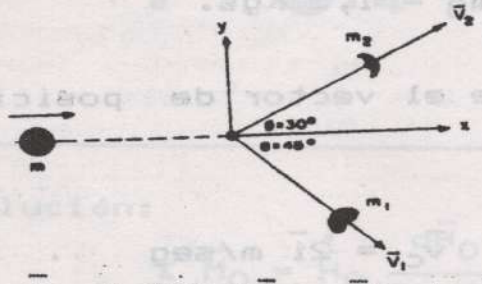
5.4.- W_1 = 25N; (2) W_2 = 20N; W_3 = 30N

(1) (2) (3) ◄--- F = 100 New.

Las tres partículas anteriores parten del reposo y caen en un plano vertical. La fuerza F actúa horizontalmente sobre la partícula (3). Determine la aceleración del centro de masa del sistema.

R : $\bar{a}_c = (-13{,}07\bar{i} - 9{,}8\bar{j})$ m/seg²

5.5.-

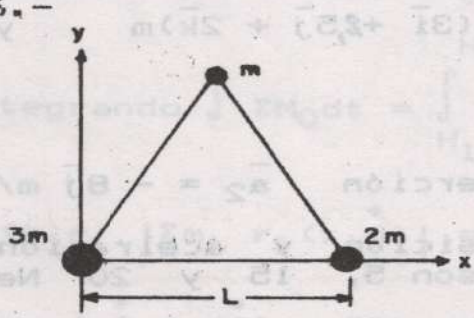


Un proyectil de masa 10 Kgs que viaja a una velocidad v_0 = 200 m/seg, se parte en dos en el punto A.

Calcule los valores de $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ si m_1 = 2 Kgs.

R: $\bar{v}_1 = 367\ (\bar{i} - \bar{j})$ m/seg ; $\bar{v}_2 = (158{,}47\bar{i} + 91{,}49\bar{j})$ m/seg.

5.6.-

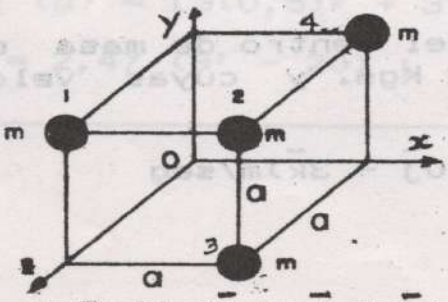


Tres partículas de masas m, 2 m y 3 m están situadas en los vértices de un triángulo equilátero.

Localice el centro de masa de ellas.

R : $\bar{r}_c = (L/12)(5\bar{i} + \sqrt{3}\bar{j})$.

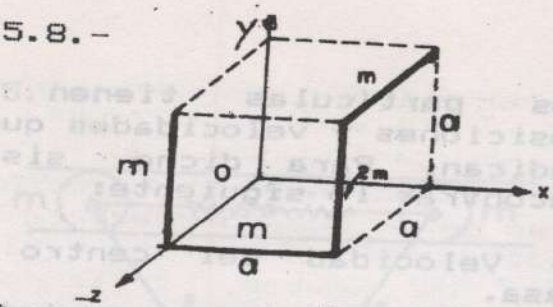
5.7.-



Un cubo de arista a, tiene cuatro partículas ubicadas en sus extremos como indica la figura. Localice el centro de masa del sistema.

R : $\bar{r}_c = 3a/4\ (\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$

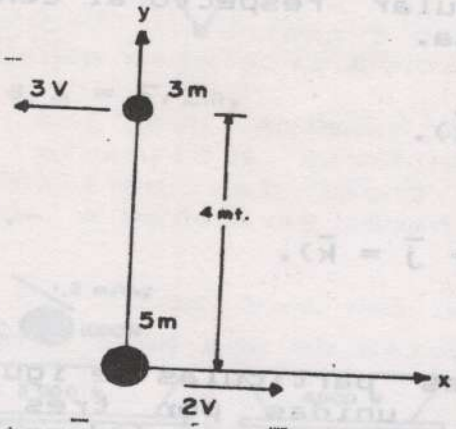
5.8.-



Sea un cubo de arista a, en el que se situan cuatro barras delgadas de masa m y longitud a. Localice el centro de masa del sistema, considerando subsistemas apropiados.

R : $\bar{r}_c = a\,(0,7\bar{i} + 0,5\bar{j} + 0,9\bar{k})$.

5.9.-



Dos partículas de masas 3m y 5m se mueven con velocidades 3v y 2v respectivamente, en la dirección mostrada. En la posición indicada, determine:
a) Posición del centro de masa.
b) Velocidad del centro de masa.
c) Cantidad de movimiento lineal del sistema.

R : a) $\bar{r}_c = (3/2\bar{j})$ mts.

b) $\bar{v}_c = (1/8)\ v\bar{i}$ mts/seg.

c) $\bar{L} = m\ v\bar{i}$ (Kgs x m/seg).

5.10.-

Tres partículas inician su movimiento con velocidades constantes desde la posición que se muestra, si

$\bar{v}_1 = (5\bar{i} + 3\bar{j})$m/seg

$\bar{v}_2 = 6\bar{i}$ (m/seg) y

$\bar{v}_3 = (4\bar{i} - 2\bar{j})$ m/seg.

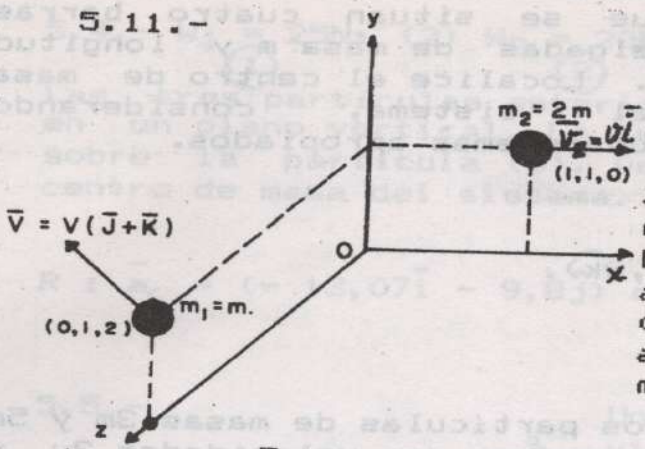
Determine: a) Velocidad del centro de masa.

b) Cantidad de movimiento lineal del sistema.

R : a) $\bar{v}_c = 1/6\ (29\bar{i} - 3\bar{j})$ m/seg.

b) $\bar{L} = m\ (29\bar{i} - 3\bar{j})$ (kgs x m/ seg.

5.11.-



Dos partículas tienen las posiciones y velocidades que se indican. Para dicho sistema encontrar lo siguiente:

a) Velocidad del centro de masa.

b) Cantidad de movimiento angular respecto al origen.

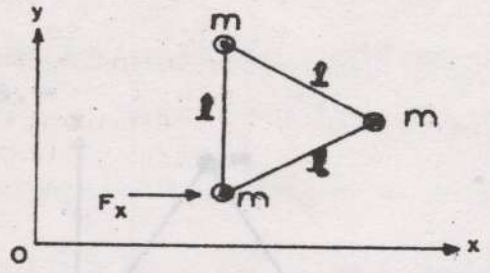
c) cantidad de movimiento angular respecto al centro de masa.

R : a) $\bar{V}_c = V/3\ (2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$.

b) $\bar{H}_O = -\ mV\bar{i} - 2mV\bar{k}$.

c) $\bar{H}_{cm} = -\ 2/3\ mv\ (2\bar{i} + \bar{j} = \bar{k})$.

5.12.-



Tres partículas de igual masa m, unidas por tres barras rígidas de peso despreciable, están inicialmente en reposo. En t=0, sobre una de las masas se ejerce una fuerza de magnitud constante F_x. Encuentre la velocidad del centro de masa en función t.

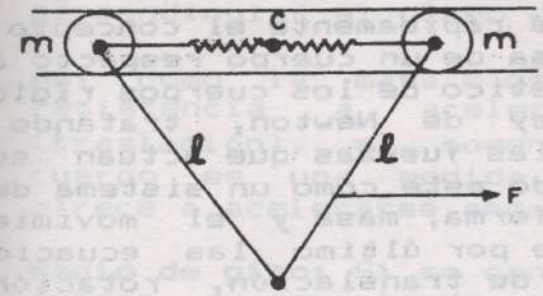
R : $\bar{V}_c = [1/3\ (F_x/m)t\bar{i} - gt\bar{j}]$ m/seg.

5.13.-

Tres micos A, B y C cuyos pesos son 100, 150 y 80 Newtons respectivamente, estan subiendo y bajando la cuerda suspendida de D. En un instante dado A desciende con una a= 1,5 m/seg² y c jala la cuerda y sube con una a= 1 m/seg². El B sube con velocidad constante de 0,6 m/seg. Trate la cuerda y los micos como un sistema y calcule la tensión T de la cuerda en D.

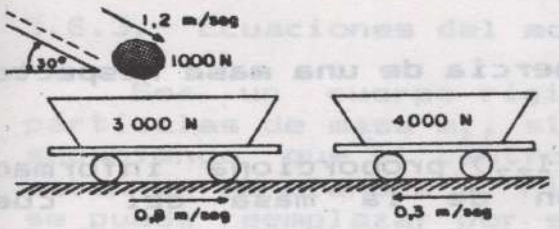
R : T = 319,59 Newtons.

5.14.- El sistema consta de dos esferas lisas, cada una de masa m, unidas por un resorte y dos barras de masa despreciable que giran libremente en sus extremos. Las esferas se mueven en una guía horizontal lisa. Si la fuerza horizontal F es aplicada a una de las barras, cuál es la aceleración del centro C del resorte?



R : $a_{cm} = F/2m$.

5.15.- Dos carros de mina se están moviendo en sentidos opuestos, en una vía horizontal con velocidades de 0,6 y 0,3 m/seg respectivamente. Cuando chocan los carros se acoplan y en ese instante se deja caer por la canal una piedra de 1.000 New. de peso, con una velocidad de 1,2 m/seg, en la dirección mostrada sobre el carro de 3.000 Newtons. Encuentre la velocidad del sistema después que la piedra llegá al reposo en el carro.



R : v = 0,20 m/seg.

5.16.- En cierto instante las partículas A, B y C tienen masas de 2, 3 y 4 Kgs respectivamente, siendo sus vectores de posición, $\bar{r}_A = (2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k})$ m/seg $\bar{r}_B = (2\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k})$ m y $\bar{r}_C = (\bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k})$ m y sus velocidades.

$\bar{v}_A = (3\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k})$m/seg; $\bar{v}_B = (2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{K})$ m/seg y $\bar{v}_C = (-2\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k})$ m/seg.

Encuentre la cantidad de movimiento angular del sistema de las tres partículas respecto al origen O.

R: $\bar{H}_O = (-5\bar{i} - 4\bar{j} - 16\bar{k})$ kgs x m²/seg.

5.6 - Cinética de los cuerpos rígidos con movimiento en un plano.

5.6.1.- Se estudiará rápidamente el concepto de momento de inercia de una masa de un cuerpo respecto a un eje. Se hará el análisis cinético de los cuerpos rígidos, basándose en la Segunda Ley de Newton, tratando de establecer relaciones entre las fuerzas que actúan sobre el mismo cuerpo, considerando este como un sistema de n partículas en contacto, su forma, masa y el movimiento que se produce, obteniéndose por último las ecuaciones adicionales en los casos de translación, rotación y movimiento plano y su aplicación a problemas específicos.

Para este análisis, se asumirá que los cuerpos rígidos son placas planas de forma arbitraria que se mueven de tal manera que todas las partículas que constituyen el sistema, lo hacen paralelas a un plano fijo de referencia.

5.6.2.- Momento de inercia de una masa respecto a un eje.

El momento de inercia (I_{zz}) proporciona información respecto a la distribución de la masa del cuerpo alrededor del eje z.

Sea un cuerpo de masa m, Fig. 5.3 en rotación alrededor de un eje fijo a-a con aceleración angular α

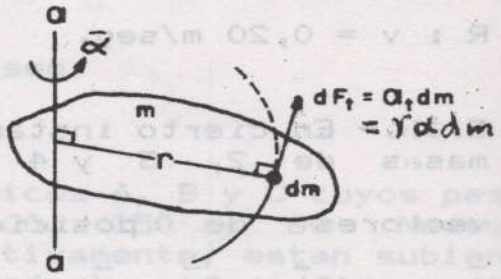


Fig. 5.3. Rotación alrededor de un eje fijo.

Consideramos como plano del movimiento el que contiene el centro de masa. Aplicdando la Segunda Ley de Newton en la dirección tangencial ($\Sigma F_t = ma_t = mr\alpha$) se tiene: $dF_t = r\alpha dm$, y su momento respecto al eje a-a es

$dM = r.dF_t = r^2\alpha\, dm$ e integrado, entonces $M = \int_m r^2\alpha\, dm$, como α es la misma para todas las rectas radiales del cuerpo, entonces $M = \alpha \int_m r^2 dm$ donde

$$I = \int_m r^2\, dm \qquad (5\text{-}21)$$

La integral se llama momento de inercia I de la masa respecto al eje a - a. Generalmente se escoge como éste eje el que pasa por el centro de la masa siendo perpendicular al plano del movimiento y llamándose I_{cm}.

Así como la masa m de un cuerpo es una medida de la resistencia a acelerarse linealmente ($\bar{F} = m\bar{a}$) (traslación), el momento de inercia de la masa de un cuerpo es una medida de la resistencia que el mismo ofrece a acelerarse angularmente ($M = I\alpha$) (Rotación).

Radio de giro: Si se conoce la longitud K y la masa m del cuerpo, su momento de inercia se obtiene por:

$$I = k^2 m \qquad (5\text{-}22)$$

o sea $$k = \sqrt{I/m} \qquad (5\text{-}22')$$

5.6.3.- Ecuaciones del movimiento de un cuerpo rígido/

Sea un cuerpo rígido formado por un sistema de n partículas de masa m_i, siendo i = 1, 2, 3, ..., n -. suponiendo que el centro de masa C_m y todas las fuerzas están en el plano x y, Fig. 5.4.a., el sistema de fuerzas se puede reemplazar por su resultante actuando en el C_m y por el momento resultante respecto a C_m. Fig. 5.4.b.

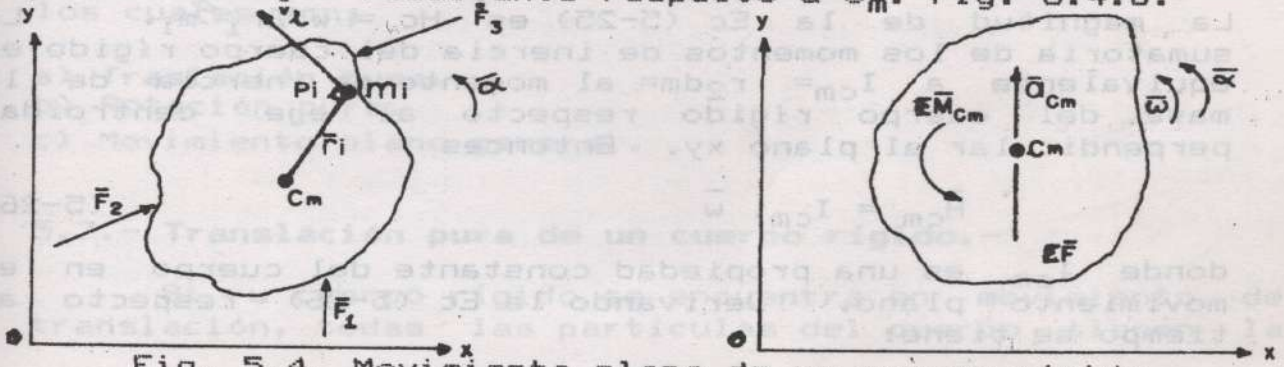


Fig. 5.4. Movimiento plano de un cuerpo rígido.

De acuerdo a la Ec. (5-8), y en vista de que el cuerpo rígido es un sistema de partículas, entonces.

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = \sum_{i=1}^{n} (m_i \bar{a}_i) = m\bar{a}_{cm} \qquad (5\text{-}23)$$

donde m es la masa total del cuerpo y $\bar{a}_{cm}$ es la aceleración del centro de masa. La fuerza resultante y la aceleración son vectores colineales.

5.6.4.- Cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido que se mueve en un plano.

El momento resultante de las fuerzas aplicadas al cuerpo rígido en la Fig. 5.3 con respecto al Cm, origina en el cuerpo una rotación y por lo tanto una aceeleración angular $\bar{\alpha}$ (indepandiente de $\bar{a}_{cm}$). De acuerdo a la Ec.(5-18) para una sistema de partículas dado.

$$\bar{\Sigma}M_{cm} = \sum_{i=1}^{n} (\bar{r}_i \times m_i a_i) = \dot{\bar{H}}_{cm} \qquad (5\text{-}24)$$

La cantidad de movimiento angular del cuerpo Fig. 5.4 es $\bar{H}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} (\bar{v}_i \times m_i \bar{v}_i)$

como $\bar{v} = \bar{w} \times r_i$ para algún cuerpo rígido, siendo, $\bar{w}$ la velocidad angular del cuerpo, entoces

$$\bar{H}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} [r_i \ (\bar{w} \times \bar{r}_i) \ m_i] \qquad (5\text{-}25)$$

La magnitud de la Ec (5-25) es $Hc = w.\Sigma r_i^{\,2} m_i$. La sumatoria de los momentos de inercia del cuerpo rígido es *equivalente* a $I_{cm} = r^2 dm$= *al momento de inercia de la masa del cuerpo rígido respecto al eje centroidal* perpendicular al plano xy. Entonces

$$\bar{H}_{cm} = I_{cm} \cdot \bar{w} \qquad (5\text{-}26)$$

donde I_{cm} es una propiedad constante del cuerpo en el movimiento plano. Derivando la Ec (5-26) respecto al tiempo se tiene:

$$\dot{\bar{H}}_{cm} = I_{cm} \ \dot{\bar{w}} = \bar{I}_{cm} \cdot \bar{\alpha} \qquad (5\text{-}27)$$

Reemplazando la Ec. (5.27) en la Ec (5.24) se tiene:

$$\Sigma \bar{M}_{cm} = I_{cm} \cdot \bar{\alpha} \qquad (5\text{-}28)$$

Las Ecs. (5-24) y 5-28) son fundamentales para describir el movimiento plano general de un cuerpo rígido y por conveniencia las escribiremos en forma escalar asi:

$$\Sigma F_x = m\,(a_{cm})_x$$

$$\Sigma F_y = m\,(a_{cm})_y$$

$$\Sigma M_{cm} = I_{cm}\,\alpha \qquad (5\text{-}29)$$

Su interpretación física se observa en la Fig. 5.5 para movimiento en el plano.

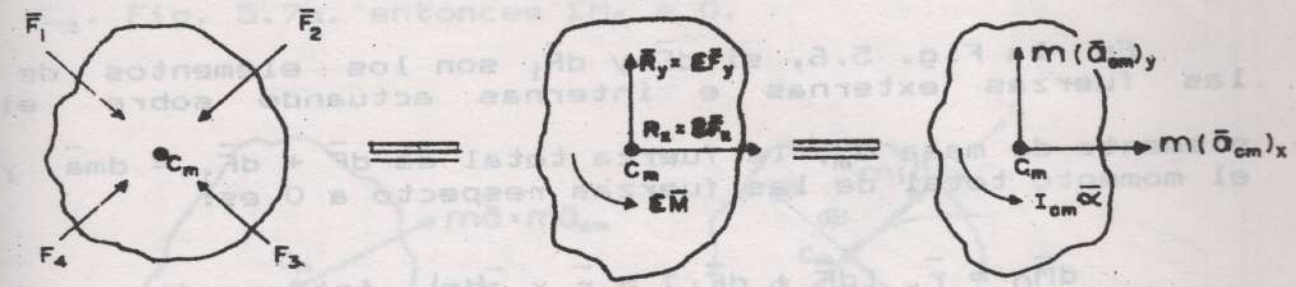


Fig. 5.5. Equivalencia entre las fuerzas aplicadas y sus efectos dinámicos.

Con el concepto de equivalencia de la Fig. 5.5 se estudiará cada uno de los tres casos de movimiento plano los cuales son;

a) Traslación pura.
b) Rotación pura.
c) Movimiento plano general.

5.7.- Translación pura de un cuerpo rígido.-

Si u cuerpo rígido se encuentra en movimiento de translación, todas las partículas del cuerpo tienen la misma aceleración, $\bar{a} = \bar{a}_{cm}$. Además la velocidad y aceleración angular son cero, ésto es $\bar{W} = 0$; $\bar{\alpha} = 0$. lo que conlleva a que la línea de acción de la fuerza resultante aplicada al cuerpo, pase por el centro de masa y que el momento de las fuerzas externas respecto a C_m sea cero, $\Sigma \bar{M}_m = 0$.

Supongamos que el punto (1) pertenece a la línea de acción de la resultante $\Sigma\bar{F} = \bar{R}$. Fig. 5.6. De acuerdo a la Segunda Ley de Newton. $\Sigma\bar{F}_T = \bar{R} = m\bar{a}$.

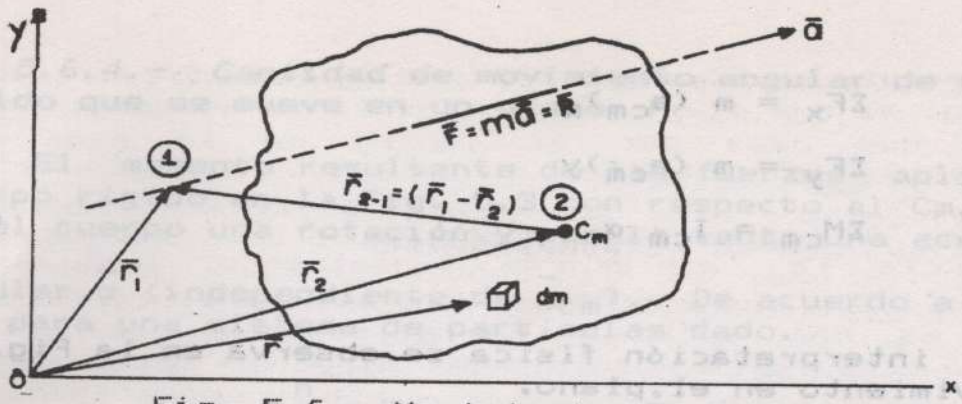


Fig. 5.6.- Movimiento de traslación.

En la Fig. 5.6, si $d\bar{F}$ y $d\bar{F}_i$ son los elementos de las fuerzas externas e internas actuando sobre el elemento de masa d_m, la fuerza total es $d\bar{F} + d\bar{F}_i = dm\bar{a}$ y el momento total de las fuerzas respecto a O es:

$$d\bar{M}_O = \bar{r}_x [d\bar{F} + d\bar{F}_i] = \bar{r} \times \bar{a}(dm), \text{ integrando}$$

$$\bar{M}_O = \int \bar{r}_x \, d\bar{F} = \int \bar{r} \times \bar{a} \, dm \quad \text{De aquí } M_O = \bar{r}_1 \times \bar{F}$$

para el punto (1).

Si el centro de masa está en el punto (2), su vector de posición $\bar{r}_2 = 1/m \int \bar{r} \, dm$. Como el cuerpo se traslada la aceleración es la misma para todos los elementos dm, entonces:

$$\bar{M}_O = \int \bar{r} dm_x \bar{a} = [\int \bar{r} dm] x^{-} = m\bar{r}_2 \times \bar{a} = \bar{r}_2 \times \bar{F} \quad \text{y como}$$

$M_O = \bar{r}_1 \times \bar{F}$ igualando se tiene:

$$(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \bar{F} = \bar{r}_{2,1} \times \bar{F} = 0$$

Como $\bar{F} \neq 0$, entonces $\bar{r}_1 = \bar{r}_2$ y el punto (1) coincide con el punto (2), centro de masa del cuerpo y la línea de acción de $\bar{F} = \bar{R}$ pasa por C_m. La ecuación también se satisface cuando $\bar{r}_1 - \bar{r}_2$ es un vector paralelo a $\bar{a}$. Si $\bar{F}$ pasa por Cm el momento de $\bar{F}$ alrededor de dicho punto es cero.

Las ecuaciones que describen la traslación, de acuerdo a la Ec. (5-29) son:

$$\Sigma F_x = m(a_{cm})_x \quad ; \quad \Sigma F_y = m\,(a_{cm})_y \quad ; \quad \Sigma M_{cm} = 0 \qquad (5\text{-}30)$$

La traslación puede ser: Rectilínea o curvilínea.

La Ec. (5-30) se utiliza para la traslación rectilínea lo mismo que para el momento con respecto a un punto A, que esté sobre la recta de acción que pase por C_m. Fig. 5.7a. entonces $\Sigma M_A = 0$.

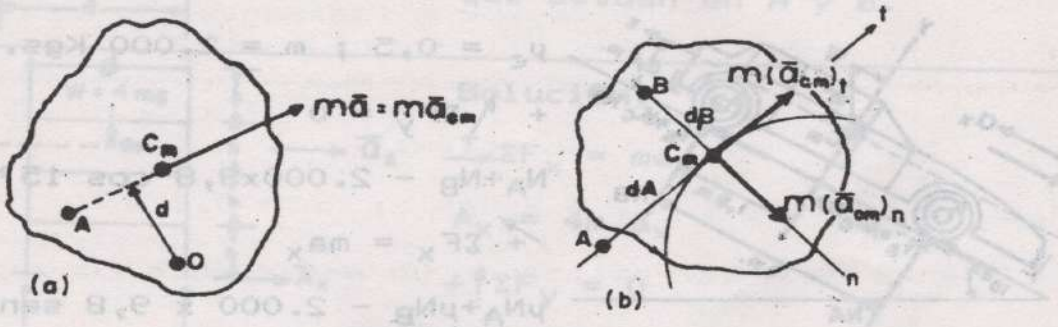


Fig. 5.7. Diagrama de fuerza resultante.

Si O es un punto cualquiera que no se halle sobre una recta que pase por C_m, entonces $\Sigma M_O = (m\,a_{cm})d$

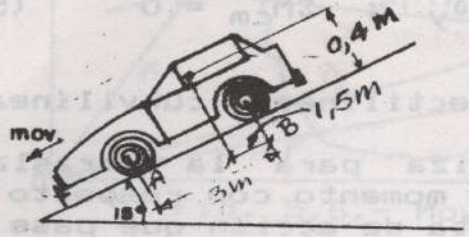
Si la traslación es curvilínea, la resultante ma puede representarse por sus componentes tangencial y normal $m\bar{a}_t$ y $m\bar{a}_n$ y las tres ecuaciones del movimiento se pueden escribir así:

$$\Sigma \bar{F}_n = m\bar{a}_n \quad ; \quad \Sigma \bar{F}_t = m\bar{a}_t \quad ; \quad \Sigma M_{cm} = 0 \qquad (5\text{-}30')$$

$$\Sigma M_A = ma_n\, d_A$$

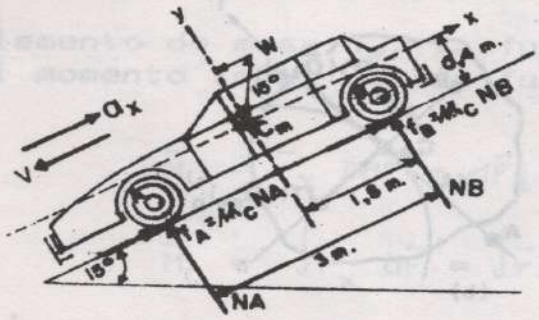
$$\Sigma M_B = ma_t\, d_B$$

Ejemplo 5.3.



Un auto de masa 2.000 Kgas. baja la pendiente inclinada 15° cuando se le aplican los frenos. Si las cuatro ruedas frenan, determine la fuerza normal y tangencial sobre ellas, para un coeficiente de fricción cinética de $\mu_c = 0,5$

Solución:



$\mu_c = 0,5$; m = 2.000 Kgs.

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$

$N_A + N_B - 2.000 \times 9,8 \cos 15° = 0 \quad (1)$

$\nearrow + \Sigma F_x = ma_x$

$\mu N_A + \mu N_B - 2.000 \times 9,8 \operatorname{sen} 15° = 2.000\, a_x \quad (2)$

$\circlearrowleft + \Sigma M_c = I_{cm}\, \alpha = 0$

$\mu N_A\,(0,4) + \mu N_B\,(0,4) - N_A\,(1,5) + N_B\,(1,5) = 0 \quad (3)$

Reemplazando (1) en (3) se tiene:

$-1,3(18.932,15 - N_B) + 1,7N_B = -24.611,79 + 1,3\,N_B + 1,7N_B = 0$

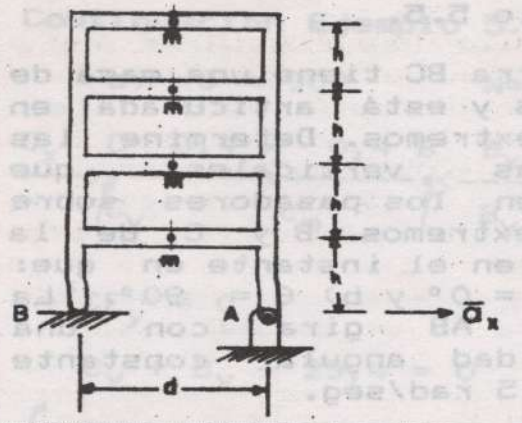
de donde $N_B =$ 8.203,93 New.

$N_A =$ 10.728,22 New.

Las fuerzas tangenciales son:

$f_A = \mu_c\, N_A = 0,5(10.728,22) = 5.364,11$ New.

$f_B = \mu_c\, N_B = 0,5(8.203,93) = 4.101,97$ New.



Ejemplo 5.4.

En un simulador sísmico, una estructura es modelda como un cuerpo rígido de miembros pesados y cuatro masas m_1 concentradas. La articulación en A es acelerada hacia la derecha en a_x y el extremo B descansa sobre una superficie rugosa. Determine las fuerzas que actuan en A y B.

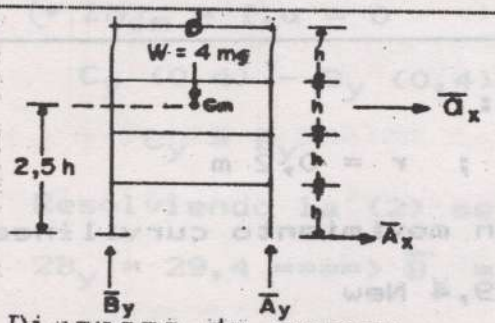


Diagrama de cuerpo libre

Solución:

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = ma_x$$

$$A_x = 4m\, a_x \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0$$

$$B_y + A_y - 4mg = 0 \qquad (2)$$

$$\left(+\right) \Sigma M_{cm} = I_{cm}\, \alpha = 0$$

$$-B_y\,(d/2) + A_y\,(d/2) + A_x\,(2{,}5h) = 0 \qquad (3)$$

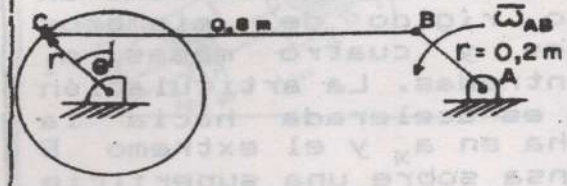
Reemplazando (1) y (2) en (3) se tiene:

$$\bar{B}_y = m/d\,(2dg + 10h\, a_x) \uparrow$$

$$\bar{A}_y = m/d\,(2dg - 10h\, a_x) \uparrow$$

$$\bar{A}_x = 4\, m\, a_x \longrightarrow$$

Ejemplo 5.5.



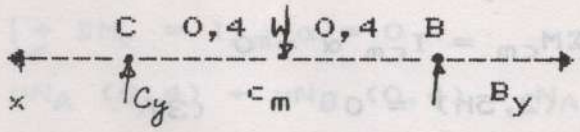
La barra BC tiene una masa de 3 Kgs y está articulada en sus extremos. Determine las fuerzas verticales que ejercen los pasadores sobre los extremos B y C de la barra en el instante en que: a) $\theta = 0°$ y b) $\theta = 90°$. La barra AB gira con una velocidad angular constante $W_{AB} = 5$ rad/seg.

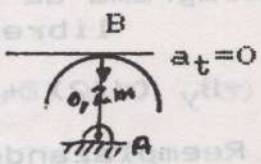
Solución:

$W_{AB} = 5$ rad/seg ; $m_{BC} = 3$ Kgs ; $r = 0,2$ m

La barra BC está realizando un movimiento curvilíneo

a) $\theta = 0°$ $W = 3 \times 9,8 = 29,4$ New





$$a_B = w^2 r = (5)^2 (0,2$$

$$a_B = (a_B)_n = 5 m/seg^2 = \bar{a}_{cm}$$

$+ \downarrow \Sigma F_y = m\, a_{cm}$ por lo tanto

$$- C_y - B_y + 29,4 = 3(5) \quad (1)$$

$\curvearrowleft + \Sigma M_{cm} = I.\alpha = 0$ así que, $C_y(0,4) - B_y(0,4) = 0 \dashrightarrow C_y = B_y$

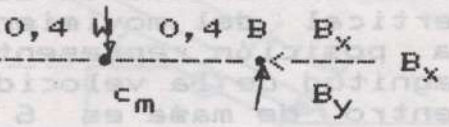
Resolviendo (1), se tiene:

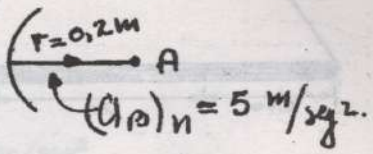
$2C_y = 29,4 - 15 = 14,4 \dashrightarrow C_y = 7,2$ New.

Por lo tanto $\bar{B}_y = \bar{C}_y = 7,2$ New. $\uparrow$

Continuación Ejemplo 5.5.

b) $\theta = 90°$ $W = 29,4$ New





$+\uparrow \Sigma F_y = 0$

$C_y + B_y - 29,4 = 0 \quad (2)$

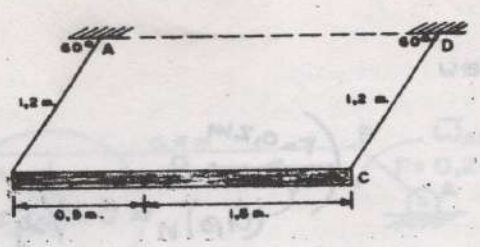
$\circlearrowleft + \Sigma M_{cm} = I.\alpha = 0$

$C_y\,(0,4) - B_y\,(0,4) = 0$

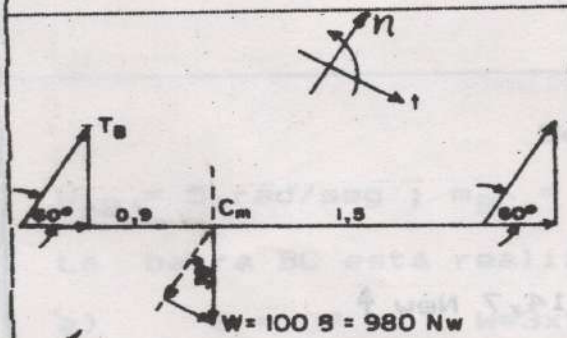
$C_y = B_y$

Resolviendo la (2) se tiene:

$2B_y = 29,4 \Longrightarrow \overline{B}_y = \overline{C}_y = 14,7$ New ↑



Ejemplo 5.6.
Las cuerdas flexibles AB y CD sustentan a la barra BC y giran contenidas en el plano vertical del movimiento. En la posición representada la magnitud de la velocidad del centro de masa es 6 m/seg. Calcule la tensión de la cuerda AB en la posición mostrada si la masa de la barra BC es de 100 Kgs.



Solución:

m= 100 Kgs.

v_{cm}= 6m/seg ; r=1,2 m

$(a_{cm})_n = v^2_{cm}/r = (6)^2/1,2 =$

$= 30\ m/seg^2$

$+\nearrow \Sigma F_n = m(a_{cm})_n$

$T_B + T_C - 980 \cos 30° = 100(30) \Rightarrow$

$T_B + T_C = 3.848,70 \quad (1)$

$+\circlearrowleft \Sigma M_{cm} = I,\alpha = 0$

$T_B \text{ sen } 60°(0,9) - T_c \text{ sen } 60°(1,5) = 0 \Rightarrow$

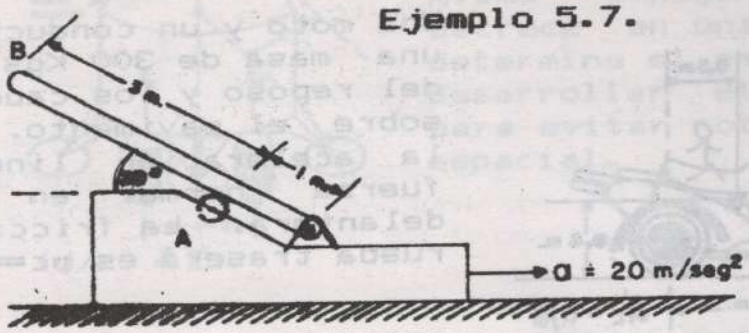
$T_c = (0,9/1,5)\ T_B = 0,6\ T_B \qquad (2)$

Reemplazamos (2) en (1) se tiene:

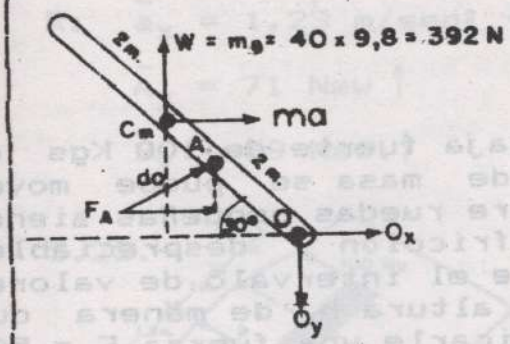
$1,6\ T_B = 3,848,70 \Rightarrow$

$T_B = 2.405,44$ New

Ejemplo 5.7.



La barra uniforme OB, cuya masa es 40 Kgs está asegurada a la estructura acelerada por la articulación en O y el rodillo A, formando un ángulo de 30° con la horizontal. Determine la fuerza F_A sobre el rodillo y las componentes x, y de la fuerza en O.



Solución:

$m = 40$ Kgs; $\bar{a} = 20 m/seg^2$ ⟶

$m_a = 40 \times 20 = 800$ N

$\curvearrowleft + \Sigma M_O = (ma)\, d_O$

$F_A(1) - 392(2 \cos 30°) = 800(2 \operatorname{sen} 30°)$

$F_A = 1.478,96$ New

$\rightarrow + \Sigma F_x = ma_x$

$O_x + 1.478,96 (\operatorname{sen} 30°) = ma = 800$

$O_x = 60,52$ New

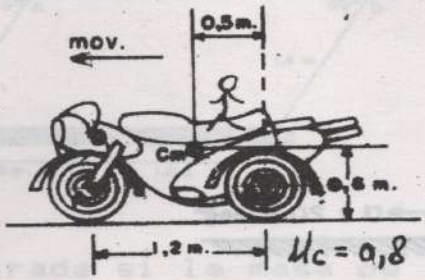
$+ \downarrow \Sigma F_y = 0;$

$O_y + 392 - 1.478,96 (\cos 30°) = 0$ por lo tanto

$O_y = 888,82$ New.

Problemas/secs. (5.6; 5.7)

5.17.-



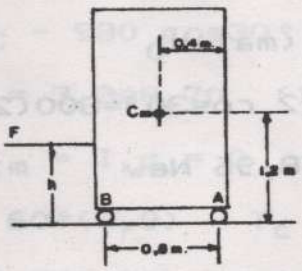
Una moto y un conductor tienen una masa de 300 Kgs. Si parte del reposo y los cauchos ruedan sobre el pavimento. Determine la aceleración lineal y la fuerza normal en la rueda delantera. La fricción en la rueda trasera es $\mu c = 0,8$.

R: $a_x = 7,62$ m/seg² ; $N_A = 81,67$ New.

5.18.- En el problema del ejemplo 5.4, encuentre la magnitud de la aceleración a_x, en el instante en que el extremo B se separa de la superficie que la soporta.

R: $a_x = 0,2\ g\ (d/h)$

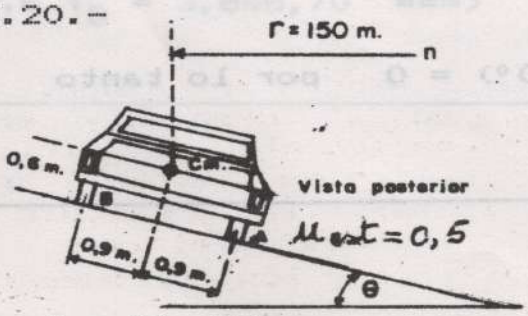
5.19.-



Una caja fuerte de 100 Kgs de masa de masa se puede mover si sobre ruedas pequeñas siendo su fricción despreciable. Calcule el intervalo de valores de la altura h, de manera que al aplicarle una fuerza F = 500 Newtons, no cause el volcamiento de la caja.

R: 0,42m < h < 1,98 m

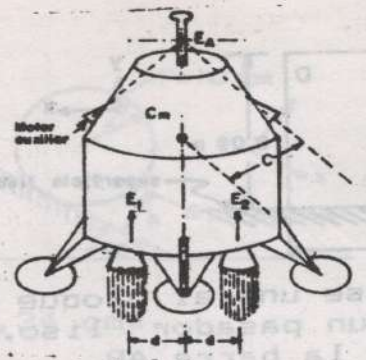
5.20.-



Un auto cuyo peso es de 1.500 Newton viaja por una carretera alcanzando en una de sus curvas una velocidad de 24 m/seg. Determine la pendiente de la banca de la carretera en la curva para que las fuerzas normales a las ruedas sean iguales.

R: $\theta = 21,40°$

5.21.-



Durante una operación normal los dos motores principales del módulo espacial producen el mismo empuje $E_1 = E_2$, si E_2 decrece en una cantidad E, determine el empuje E_A que debe desarrollar el motor auxiliar para evitar rotación en la nave espacial.

R: $E_A = (d/c)\,\Delta E$.

5.22.-

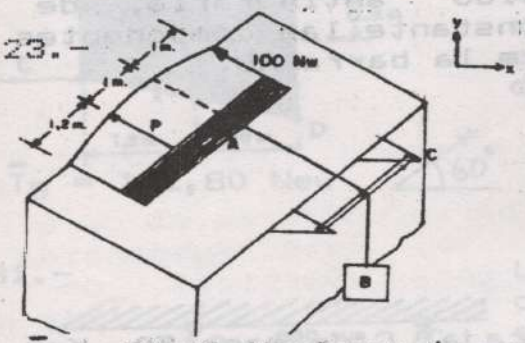
La puerta deslizante tiene un peso de 160 Newtons. Si F=20 Newtons, determine la aceleración de la puerta y las reacciones en A y *B. la masa* y la fricción en los rodillos es despreciable.

R: $\bar{a}_x = 1{,}23$ m/seg² ←----

$\bar{A}_y = 71$ New ↑

$\bar{B}_y = 89$ New. ↑

5.23.-



La barra A de 50 Kgs de masa se desliza sobre un plano horizontal liso. Esta se une al cuerpo B de 30 Kgs de masa, por una cuerda que pasa por la barra C. Cuál es el valor de P para que la barra A realice una traslación.

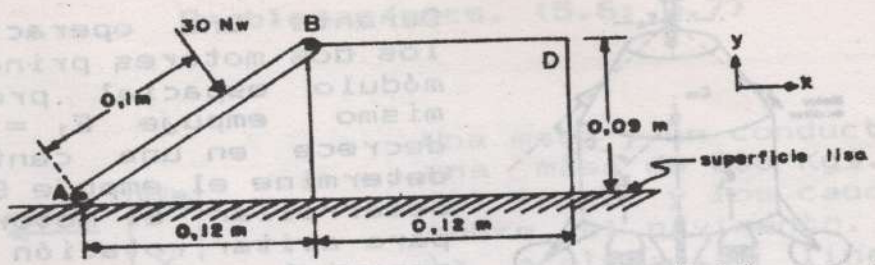
R: $\bar{P} = 43{,}60$ Newtons ←-----

5.24.-

Si el cuerpo A no se mueve con respecto al cuerpo B y siendo el coeficiente de fricción entre ellos de 0,20 y el plano horizontal liso, calcule las aceleraciones mínimas que adquirirán los bloques del sistema.

R: $\bar{a} = 4{,}69$ m/seg² ---->

5.25.-

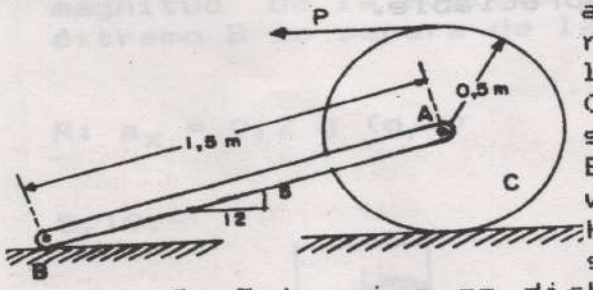


La barra AB de masa 2 Kgs se une al bloque D de masa 10 Kgs en el punto B mediante un pasador liso. Calcule las reacciones del extremo B de la barra AB.

R : $\bar{B}_x$ = 15 New. ←

$\bar{B}_y$ = 22,46 New ↑

5.26.-

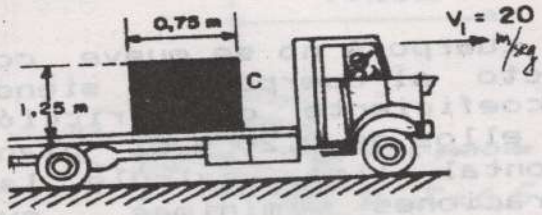


La barra AB de 8 Kgs de masa se articula al cuerpo C en A. La rueda C gira sin deslizar sobre la superficie horizontal. μ = 0,6, entre el extremo B y la superficie horizontal. En el instante considerado w = 4 red/seg en sentido horario y α = 2 rad/seg² en sentido antihorario, de la rueda C. Determine en dicho instante las componentes de la reacción del pasador A sobre la barra AB.

R: $\bar{A}_x$ = 11,57 New ←

$\bar{A}_y$ = 45,78 New ↑

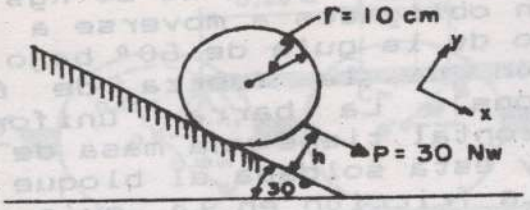
5.27.-



La caja C de masa 50 Kgs se apoya sobre la plataforma de un camión para el que μ = 0,30. Si la velocidad del camión es de 20 m/seg, cuál es la distancia mínima x en la que puede parar el camión sin que la caja deslice. Suponer que la caja no sufre volcamiento.

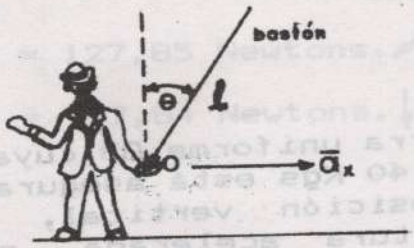
R : x = 68,03 metros.

5.28.- Un aro delgado de masa 10 Kgs y radio 10 cms es arrastrado a lo largo de un plano inclinado de manera que no tiene rotación. Si el coeficiente de roce es μ = 0,20, determine la distacia h.



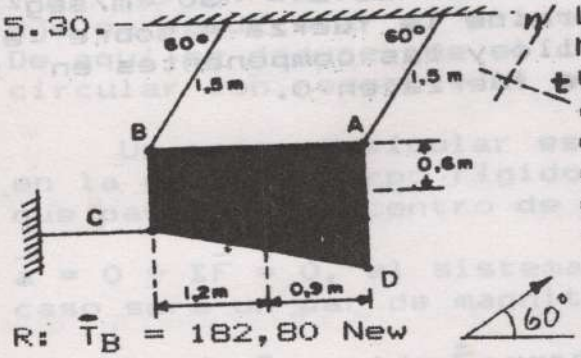
R: h = 4,34 cms.

5.29.- Una persona trata de balancear un bastón en posición inclinada. Calcule la aceleración horizontal de la mano para que el ángulo θ sea constante e igual a 10°.



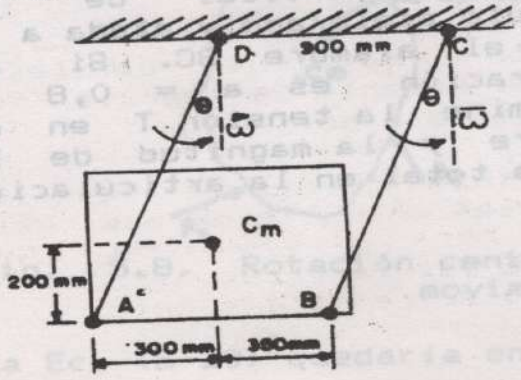
R: $\bar{a}_x$ = 1,73 m/seg² ---->

5.30.- La placa vertical ABCD pesa 800 New con su centro de masa en C_m. Está sostenida por los cables paralelos A y B y por el cable horizontal C. Si se rompe el cable C, calcule la tensión en el cable B inmediatamente después de la rotura.



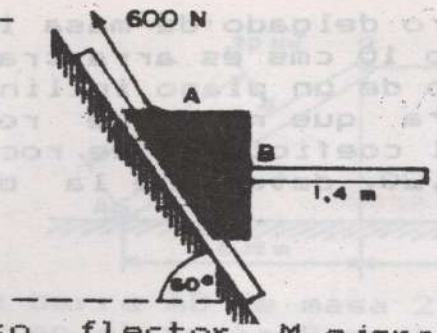
R: $\bar{T}_B$ = 182,80 New

5.31.- La placa de 50 Kgs de masa con centro de masa en C_m. C_m está suspendida de dos varillas AD y BC paralelas y puede oscilar libremente en un plano vertical. Para que ángulo θ puede soltarse la placa partiendo del reposo, de tal manera que inmediatamente después de hacerlo la fuerza en la varilla BC sea cero? Cuál es la fuerza en la varilla AD en ese instante.



R: θ = 56,31° ; $\overline{\overline{AD}}$ = 271,80 New 33,69°

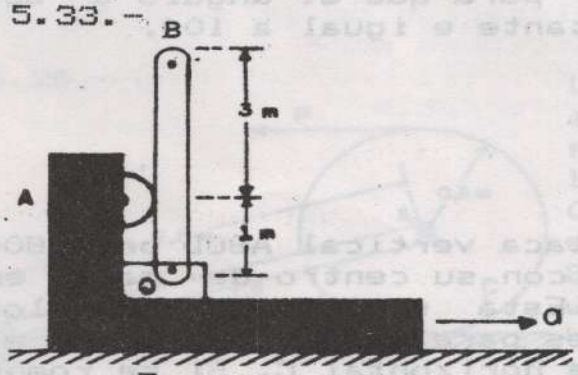
5.32.-



El bloque A y la barra sujeta a él tienen una masa de 50 Kgs y están obligados a moverse a lo largo de la guía de 60° bajo la acción de la fuerza de 600 Newtons. La barra uniforme horizontal tiene una masa de 15 Kgs y está soldada al bloque en B. La fricción en la guía es despreciable. Encuentre el momento flector M ejercido por la soldadura sobre la barra en B.

R: M = 134,8 Nxm.

5.33.-

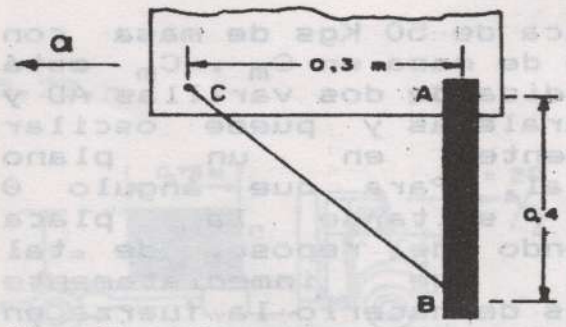


La barra uniforme OB cuya masa es de 40 Kgs está asegurada en la posición vertical, a la estructura acelerada, por la articulación en O_y el rodillo en A. Si la aceleración horizontal es a = 30 m/seg², determine la fuerza A sobre el rodillo y las componentes en x de la fuerza en O.

R : $\bar{F}_A$ = 2,4 KN ----→

$\bar{O}_x$ = 1,2 KN ←----

5.34.-

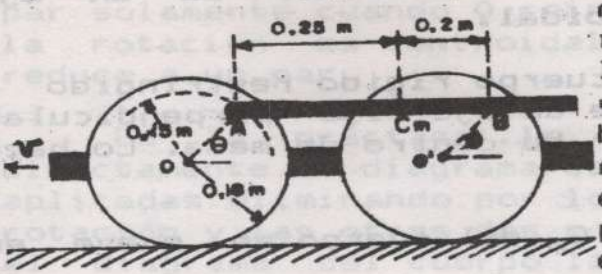


La barra uniforme AB de 6 Kgs de masa, está suspendida en posición vertical de un vehiculo acelerado y atada a C por el alambre BC. Si la aceleración es a = 0,8 g determine la tensión T en el alambre y la magnitud de la fuerza total en la articulación A.

R: T = 39,20 Newtons.

A = 36,14 Newtons.

5.35.- Dos ruedas idénticas están montadas sobre una estructura y ruedan sin deslizamiento hacia la izquierda con velocidad constante v = 2,5 m/seg. La barra AB que las une tiene una masa de 8 Kgs y está fija a A en la rueda delantera y el perno B de la segunda rueda encaja en una pequeña ranura horizontal lisa de AB. Determine las fuerzas totales ejercidas sobre la barra por los pernos A y B para la posición θ = 60°.



R: $\bar{A}$ = 127,85 Newtons. ↙

$\bar{B}$ = 67,84 Newtons. ↓

5.8.- Rotación Pura de un cuerpo rígido.-

a) Un cuerpo con rotación pura en un plano tiene un eje perpendicular al plano del movimiento que está fijo. De aquí se deduce que el centro de masa tiene movimiento circular con respecto al eje de rotación.

Un caso particular es el de la rotación centroidal, en la que el cuerpo rígido rota alrededor de un eje fijo que pasa por el centro de masa. Puesto que $\bar{r}$ = 0 $\bar{v}$ = 0; $\bar{a}$ = 0 y $\Sigma\bar{F}$ = 0, el sistema de fuerzas resultante en este caso será un par de magnitud $I_{cm}.\alpha$. Fig. 5.8.

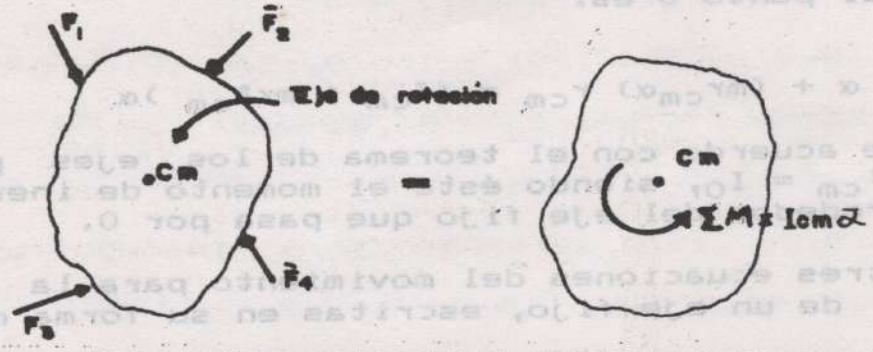


Fig. 5.8. Rotación centroidal de un cuerpo rígido en *movimiento plano.*

La Ec. (5-29) quedaría en la forma:

$\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$; $\Sigma M_{cm} = I_{cm}\alpha$. (5-31)

b) **Movimiento de rotación (alrededor de un eje fijo) no centroidal o excentroidal.**

Es el *movimiento de un cuerpo rígido restringido* a un plano vertical alrededor de un eje fijo perpendicular a dicho plano, que no pasa por su centro de masa. Lo hace por el punto O. Fig. 5.9.

Puesto que el centro de masa C_m del cuerpo se mueve en una trayectoria circular de radio $\bar{r}_{cm}$, la aceleración de éste punto está representada por sus componentes normal y tangencial ($\bar{a}_{cm} = w^2 . \bar{r}_{cm}$ dirigida hacia O y $(\bar{a}_{cm})_t = \bar{r}\alpha$ dirigida perpendicularmente a $\bar{r}_{cm}$ y en el sentido de $\bar{\alpha}$. Fig. 5.9.C.

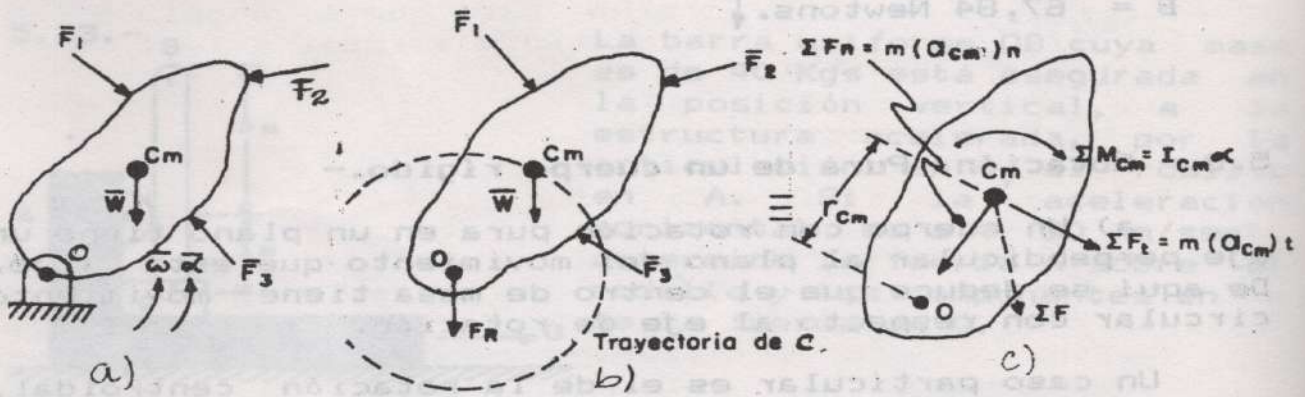


Fig. 5.9. Equivalencia entre las fuerzas aplicadas y los efectos dinámicos en la rotación no centroidal.

El momento respecto a un eje fijo de referencia que pasa por el punto O es:

$$\Sigma M_O = I_{cm}\,\alpha + (mr_{cm}\alpha)\,r_{cm} = (I_{cm} + mr^2_{cm})\alpha \qquad (5\text{-}32)$$

donde, de acuerdo con el teorema de los ejes paralelos $I_{cm} + mr^2_{cm} = I_O$, siendo éste el momento de inercia del cuerpo alrededor del eje fijo que pasa por O.

Las tres ecuaciones del movimiento para la rotación alrededor de un eje fijo, escritas en su forma más útil serán,

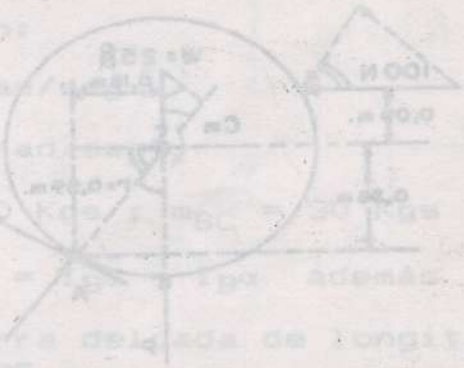
$$\Sigma F_n = m\, r_{cm}\, w^2$$

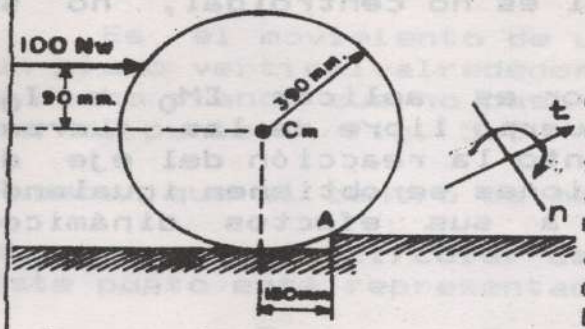
$$\Sigma F_t = m\, r_{cm}\, \alpha \qquad (5\text{-}33)$$

$$\Sigma M_O = I_O\, \alpha.$$

Nota: El sistema de las fuerzas externas se reduce a un par solamente cuando O coincide con C_m, o sea solo cuando la rotación es centroidal, si es no centroidal, no se reduce a un par.

En la práctica lo mejor es aplicar $\Sigma M_O = I_O \alpha$ directamente al diagrama del cuerpo libre de las fuerzas aplicadas eliminando por lo tanto la reacción del eje de rotación y las otras dos ecuaciones se obtienen igualando el diagrama del cuerpo libre a sus efectos dinámicos equivalentes.



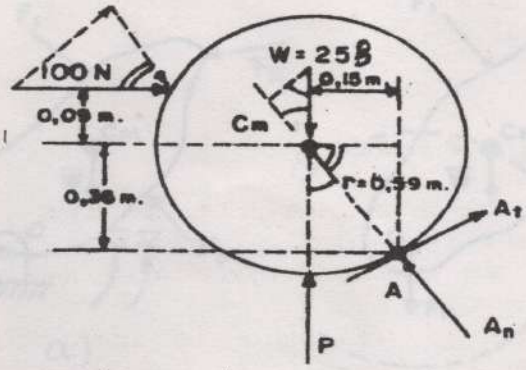


Ejemplo 5.8.

Un tambor homogéneo de 25 Kgs de masa reposa contra el escalón pequeño A. Para superar el obstáculo se aplica la fuerza de 100 New. Calcule:

a) Aceleración angular inicial del tambor.

b) Componentes normal y tangencial de la reacción que se desarrolla en A en ese instante.



Solución:

a) $m = 25$ Kgs $\quad w_i = 0$ parte del reposo.

$P = 0$ si α tiene sentido horario.

$$(+ \quad \Sigma M_A = I_A \alpha = \alpha(I_{cms} + mr^2_{cm})$$

$$100(0,36+0,09) - 25 \times 9,8(0,15) =$$

$$= \alpha_i [\tfrac{1}{2}(25)(0,39)^2 + 25\ (0,39)^2]$$

ya que $I_{cm} = \tfrac{1}{2} m\ r^2_{cm}$. Por lo tanto

$45 - 36,75 = \alpha\ (5,70)$ así $\bar{\alpha}_i = 1,45$ rad/seg²

b) $+\uparrow \Sigma F_n = m(a_{cm})_n = m(r w_i) = 0$

$A_n - 25\ (9,8)(0,36/0,39) - 100(0,15/0,39) = 0$ de donde

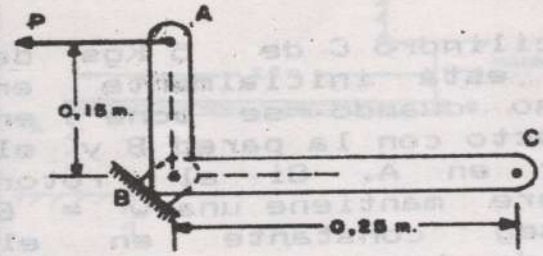
$A_n = 264,61$ New. o sea $\bar{A}_n = 64,61$ New. $\angle 67,38°$

$+\nearrow \Sigma F_t = m(a_{cm})_t = m\ (r\alpha_i)$

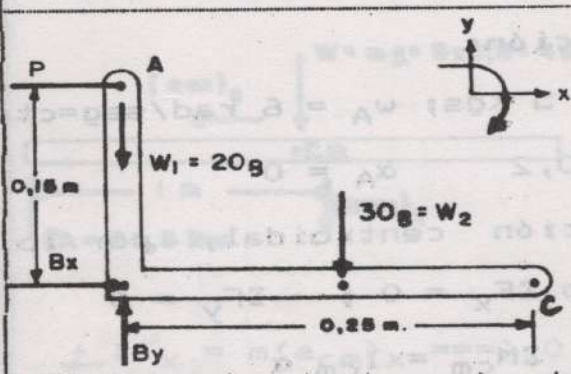
$A_t - 25 \times 9,8(0,15/0,39) + 100(0,36/0,39) = 25(0,39)(1,45)$

$A_t = 16,06$ New o sea $\bar{A}_t = 16,06$ New $\angle 68,96°$

Ejemplo 5.9.



La palanca escilante ACB gira alrededor del eje horizontal liso C, en esa posición la velocidad y aceleración angulares son 8 rad/seg en sentido antihorario y 24 rad/seg² en sentido horario, respectivamente. La masa del segmento AB es 20 Kgs y la masa de BC es 30 Kgs. calcule en ese instante la fuerza P y las componentes de la reacción del pasador B.



Solución:

$\bar{w} = 8$ rad/seg ↻

$\bar{\alpha} = 24$ rad/seg² ↻

$m_{AB} = 20$ Kgs ; $m_{BC} = 30$ Kgs

$(+\circlearrowleft) \Sigma M_B = I_B\alpha = I_B\alpha$ además

El momento de inercia de una barra delgada de longitud l y masa m es $I = \frac{1}{12} m l^2$, entonces

$$-P(0,15) + 30g(0,25/2) = \alpha [1/3(20)(0,15)^2 + 1/3(30)(0,25)^2] = 0,775(24)$$

$$\bar{P} = 121 \text{ New} \longleftarrow$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = m(a_{cm})_x$$

$$B_x - 121 = m_{AB} r_{AB} \alpha - m_{BC} r_{BC} w^2 = 20(0,15/2)(24) - 30(0,25/2)(24)$$

$$B_x = -83 \text{ New}; \qquad \bar{B}_x = 83 \text{ New} \longleftarrow$$

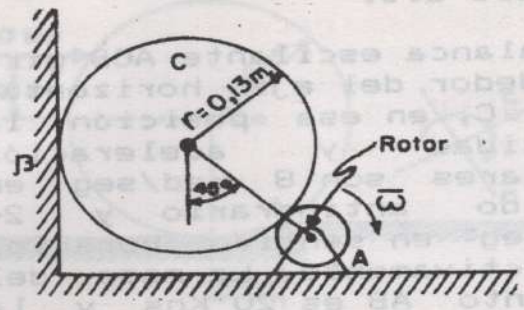
$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_{cm})_y$$

$$B_y - 20(9,8) - 30(9,8) = m_{AB} r_{AB} w^2 - m_{BC} r_{BC} \alpha =$$

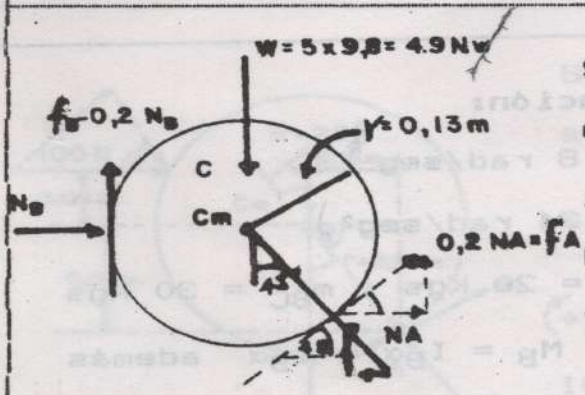
$$= -20(0,15/2)(8^2) - 30(0,25/2)(24)$$

$$B_y = 304 \text{ New o sea } \bar{B}_y = 304 \text{ New} \uparrow$$

Ejemplo 5.10.



Un cilindro C de 5 Kgs de masa está inicialmente en reposo cuando se pone en contacto con la pared B y el rotor en A. Si el rotor siempre mantiene una w = 6 rad/seg constante en el sentido horario, determine las normales en los puntos de contacto y la aceleración angular inicial del cilindro, μ entre B y C es 0,2.



Solución:

m_c = 5 Kgs; w_A = 6 rad/seg=cte

μ = 0,2 $\quad \alpha_A$ = 0

Rotación centroidal, por lo tanto $\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$

$$\Sigma M_{cm} = I_{cm}\,\alpha$$

$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = m(a_{cm})_x = 0$

$$N_B + 0,2\,N_A \cos 45° - N_A \operatorname{sen} 45 = 0 \qquad (1)$$

$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_{cm})_y = 0$; así

$$N_A \cos 45° + 0,2\,N_A(\operatorname{sen} 45°) + 0,2N_B - 49 = 0 \qquad (2)$$

Resolviendo (1) y (2) se tiene:

N_A = 50,83 New o sea $\bar{N}_A$ = 50,83 New

N_B = 28,97 New o sea $\bar{N}_B$ = 28,97 New ------>

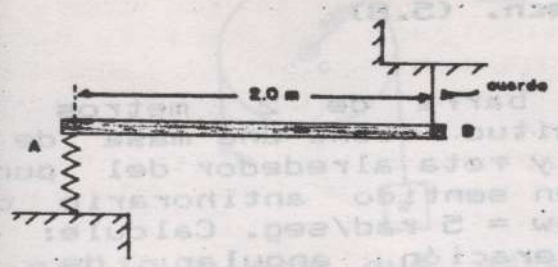
$(+\circlearrowleft \Sigma M_{cm} = I_{cm}\alpha$ pero $I_{cm} = \frac{1}{2}mr^2$ para un disco delgado

$$0,2N_A(0,13) - 0,2N_B(0,13) = [\tfrac{1}{2}(5)(0,13)^2]\alpha \qquad (3)$$

Reemplazando valores en (3) se tiene:

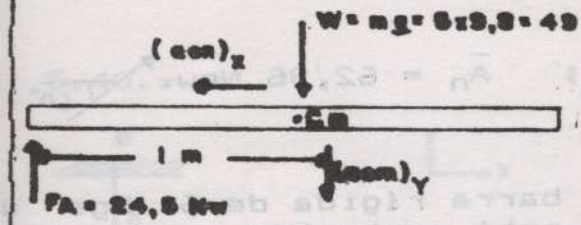
α = 13,57 rad/seg^2 o sea $\bar{\alpha}$ = 13,57 rad/seg^2)

Ejemplo 5.11.



Una barra delgada uniforme AB de 5 Kgs de masa, se suspende horizontalmente mediante un resorte en A y una cuerda en B. Determine la aceleración angular de la barra y la aceleración del centro de masa de la misma en el instante en que la cuerda en B se corta. La rígidez del resorte no se necesita para el cálculo.

Solución:



m = 5 Kgs

Puesto que la deflexión del resorte es igual en el instante en que la cuerda se corta, la reacción en A es:

$F_A = 49/2 = 24,5$ New

$\pm \Sigma F_x = m(a_{cm})_x \Longrightarrow 0 = 5(a_{cm})_x \Longrightarrow (a_{cm})_x = 0$ (1)

$+\downarrow \Sigma F_y = m(a_{cm})_y \Longrightarrow 49 - 24,5 = 5(a_{cm})_y$ (2)

$(a_{cm})_y = 4,9$ m/seg² o sea $\bar{(a_{cm})_y} = 4,9$ m/seg² ↓

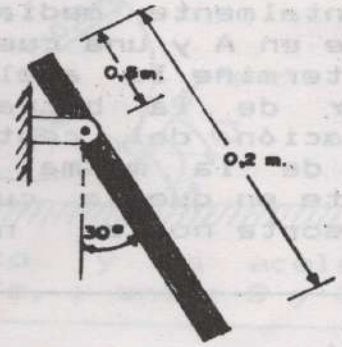
$\circlearrowleft +\Sigma M_{cm} = I_{cm}\alpha$ pero $I_{cm} = 1/12\ ml^2$ respecto al centro de masa de la barra delgada.

$24,5(1) = [1/12(5)(2)^2]\ \alpha \Longrightarrow$

$\alpha = 14,70$ rad/seg² o sea $\bar{\alpha} = 14,70$ rad/seg² ↻

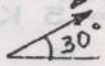
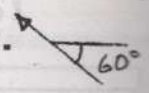
Problemas/secn. (5.8)

5.36.-

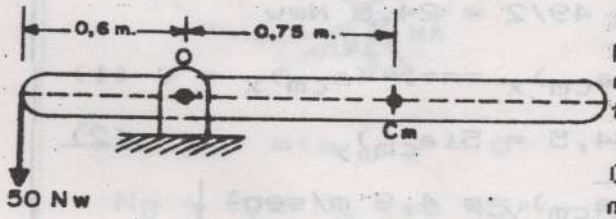


La barra de 2 metros de longitud tiene una masa de 3 Kgs y rota alrededor del punto A en sentido antihorario con una w = 5 rad/seg. Calcule: a) Aceleración angular de la barra. b) Componentes normal y tangencial de la reacción en el punto A.

R: a) $\bar{\alpha} = 4,20$ rad/seg².

b) $\bar{A}_t = 8,40$ new.  ; $\bar{A}_n = 62,96$ New. 

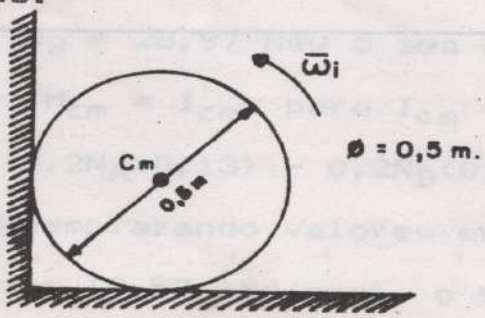
5.37.-



La barra rígida de 6 Kgs de masa está contenida en el plano vertical y rota alrededor del punto fijo). En la posición mostrada la aceleración tangencial del centro de masa $(a_{cm})_t = 3$ m/seg² hacia abajo. Calcule el radio de giro de la masa respecto a un eje paralelo al eje de rotación por el punto C_m.

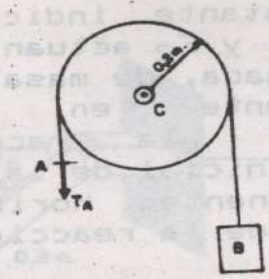
R: $K_{cm} = 155,46$ m.m.

5.38.-



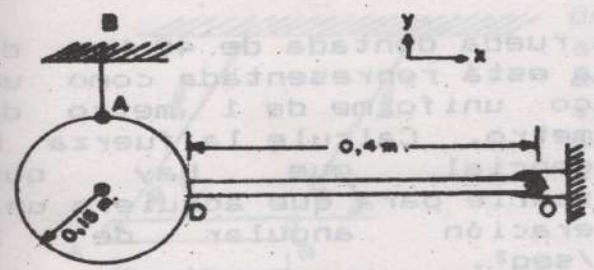
La velocidad angular inicial del cilindro-homogéneo es 90 rad/seg en sentido antihorario $\mu = 0,2$ entre el cilindro y las superficies horizontal y vertical. Calcule el tiempo y la aceleración angular requerido para que el cilindro se detenga.

R: t = 4,99 seg ; $\bar{\alpha} = 18,03$ rad/seg².

5.39.- 

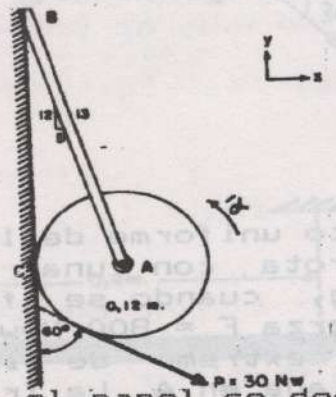
Calcule la fuerza T_A que debe aplicarse al cable en A para que el bloque B de 10 Kgs de masa, adquiera una aceleración hacia arriba de 0,5 m/seg². Suponer que el cable no desliza sobre la superficie del disco de 20 Kgs de masa. Calcule la tensión en el extremo de la cuerda que sostiene el bloque y explique por qué esta tensión es diferente a la que existe en A. El disco está articulado en su centro c y está libre para girar.

R: $\bar{T}_A = 108$ New ↓ ; $\bar{T}_B = 103$ New. ↑

5.40.- 

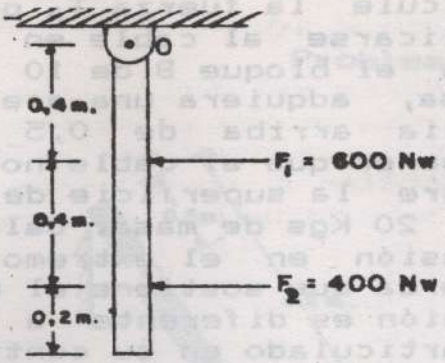
Un péndulo está formado por una esfera de 20 Kgs de masa y una barra OD delgada de 5 Kgs de masa. Calcule la reacción en el pasador O inmediatamente después de que se corta la cuerda AB.

R: $\bar{O}_x = 0$; $\bar{O}_y = 27,92$ New. ↑

5.41.- 

Un rollo de papel de 20 Kgs de masa está articulado por sus extremos al brazo AB. Si el rollo se apoya sobre una pared para la cual $\mu = 0,3$; y se aplica una fuerza de de 30 New uniformemente a la hoja, determine la tensión en el brazo AB, la normal en C y la aceleración angular inicial, cuando el papel se desenrrolla. Trate el rollo de papel como un cilindro.

R: $\bar{T} = 210,69$ New ↗ ; $\bar{N}_c = 55,05$ New → ; $\bar{\alpha} = 11,24$ rad/seg² ↻

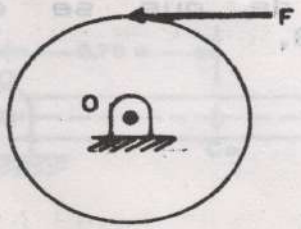
5.42.- 

En el instante indicado, las fuerzas F_1 y F_2 actuan sobre la barra delgada, de masa 10 Kgs y originalmente en reposo. Determinar la aceleración angular inicial de la barra y las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador O.

R: $\bar{\alpha} = 168$ rad/seg² ↻

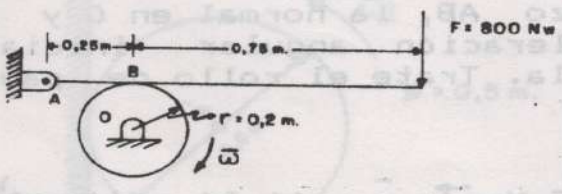
$\bar{O}_x = 160$ New ←

$\bar{O}_y = 98$ New. ↑

5.43.- 

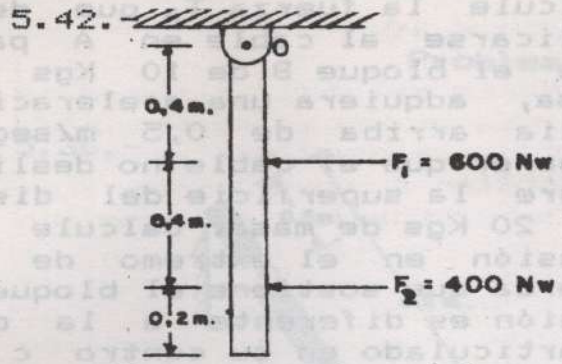
Una rueda dentada de 40 Kgs de masa está representada como un disco uniforme de 1 metro de diámetro. Calcule la fuerza F tangencial que hay que aplicarle para que adquiera una celeración angular de 2 rad/seg².

R: $\bar{F} = 20$ New →.

5.44.- 

Un disco uniforme de 10 Kgs de masa rota con una w = 160 rad/seg, cuando se frena con una fuerza F = 800 New aplicada en el extremo de la barra articulada en A. La fricción en O y A es despreciable, siendo $\mu_{cin} = 0,5$ en el punto B. Calcule el tiempo necesario para parar el disco.

R: t= 0,10 seg.

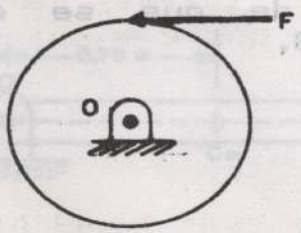
5.42.- 

En el instante indicado, las fuerzas F_1 y F_2 actuan sobre la barra delgada, de masa 10 Kgs y originalmente en reposo. Determinar la aceleración angular inicial de la barra y las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador O.

R: $\bar{\alpha} = 168$ rad/seg² ↻

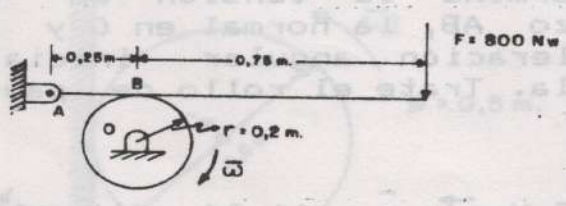
$\bar{O}_x = 160$ New ←

$\bar{O}_y = 98$ New. ↑

5.43.- 

Una rueda dentada de 40 Kgs de masa está representada como un disco uniforme de 1 metro de diámetro. Calcule la fuerza F tangencial que hay que aplicarle para que adquiera una celeración angular de 2 rad/seg².

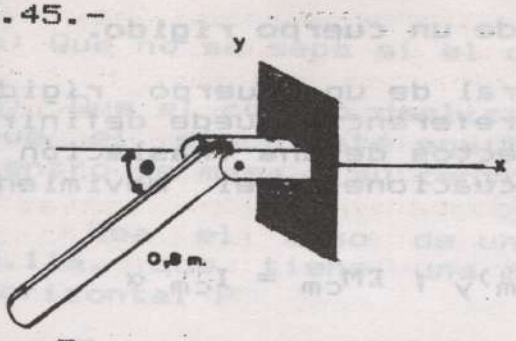
R: $\bar{F} = 20$ New ←.

5.44.- 

Un disco uniforme de 10 Kgs de masa rota con una w = 160 rad/seg, cuando se frena con una fuerza F = 800 New aplicada en el extremo de la barra articulada en A. La fricción en O y A es despreciable, siendo $\mu_{cin} = 0,5$ en el punto B. Calcule el tiempo necesario para parar el disco.

R: t= 0,10 seg.

5.45.-



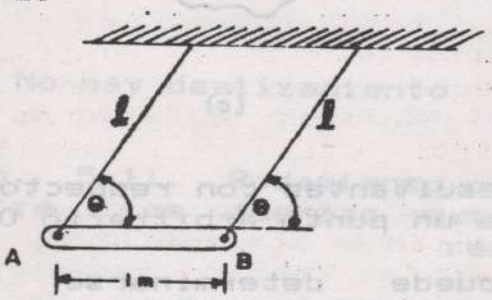
Una barra delgada y uniforme de masa 4 Kgs, se suelta del reposo cuando $\theta = 30°$. Calcule la aceleración angular de la barra y las componentes x e y, de la reacción en O para el instante después de soltarse.

R: $\bar{\alpha} = 15,98$ rad/seg² ↻

$\bar{O}_x = 12,80$ New ----->

$\bar{O}_y = 17,04$ New. ↑

5.46.-

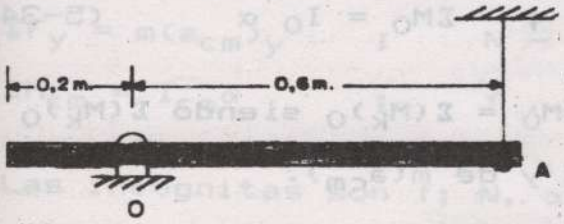


Una barra uniforme de 10 Kgs de masa está sostenida por dos alambres. Determine la aceleración de la barra y la tensión en los alambres para la posición en que $\theta = 60°$ y $w = 0$

R: $\bar{a} = 4,90$ m/seg² ↙30°

$\bar{T}_1 = \bar{T}_2 = 42,44$ New. ↗60°

5.47.-



La barra delgada uniforme tiene una masa de 6 Kgs. si se corta la cuerda en A, determine la reacción en el pasador O, cuando la barra está aún en la posisción horizontal.

R: $O_x = 0$

$\bar{O}_y = 33,48$ Newtons. ↑

5.9.- Movimiento plano general de un cuerpo rígido.

El movimiento plano general de un cuerpo rígido, simétrico respecto al plano de referencia puede definirse como la superposición de los efectos de una traslación y una rotación centroidal. Las ecuaciones del movimiento utilizando la Fig. 5.10b. son:

$$\Sigma F_x = m(a_{cm})_x \; ; \Sigma F_y = m\,(a_{cm})_y \; ; \; \Sigma M_{cm} = I_{cm}\,\alpha$$

igual que la Ec. (5-29).

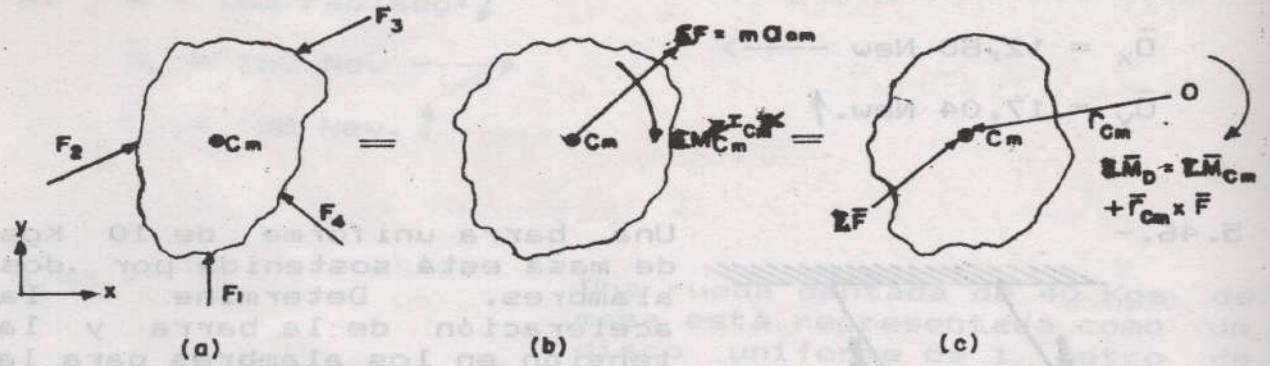


Fig. 5.10. Fuerzas y momentos resultantes con respecto al centro de masas o con respecto a un punto arbitrario O.

El *momento resultante puede* determinarse con respecto a un punto arbitrario no centroidal O, en vez de C_m. Fig 5.10c. Esto generalmente se hace para eliminar fuerzas desconocidas a partir de la suma de momentos.

En este caso generalmente, la Ec. (5.29) se convierte en:

$$\Sigma F_x = m(a_{cm})_x \; ; \; \Sigma F_y = m(a_{cm})_y \; ; \; \Sigma M_O = I_O\,\alpha \qquad (5\text{-}34)$$

siendo $I_O = I_{cm} + mr^2{}_{cm}$ o con $\Sigma M_O = \Sigma(M_k)_O$ siendo $\Sigma(M_k)_O$ la suma de los momentos de $I_{cm}\alpha$ y de $m(a_{cm})$.

5.9.1.- Movimiento de rodadura.-

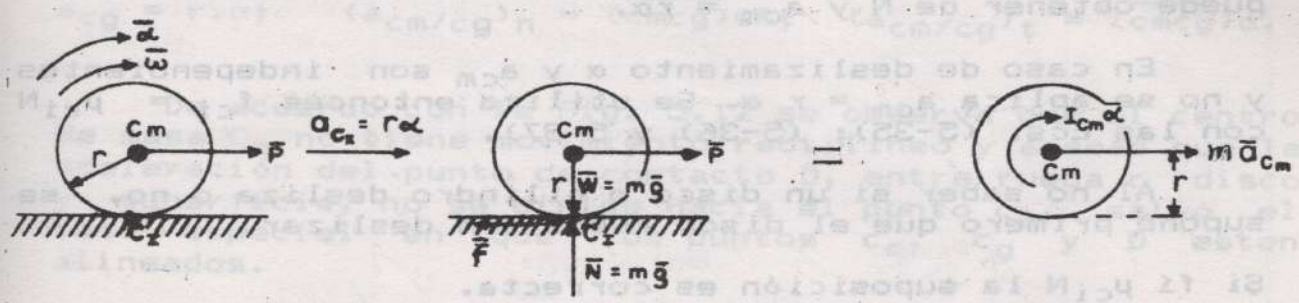
Hay muchos problemas de movimiento plano general, que involucran, ruedas, cilindros o cuerpos de forma similar, cuya solución se facilita si se les restringe el movimiento, al rodar ellos sobre una superficie plana

rugosa, presentándose los siguientes casos especiales:

a) Que no se sepa si el cuerpo rueda sin deslizar.

b) Que el cuerpo desliza conforme rueda ésto suponiendo que el disco esté equilibrado, o sea que coinciden su centro de masa y su centro geométrico.

Sea el caso de un disco homogéneo rodante Fig. 5.11a, que tiene una masa m y sometido a una fuerza horizontal P



a) No hay deslizamiento b)

Fig. 5.11. Rodamiento puro de una rueda. Equivalencia entre las fuerzas externas y la fuerza efectiva resultante.

Aquí, el centro de masa C_m, tiene un movimiento rectilíneo paralelo a la superficie plana sobre la cual rueda y su aceleración $(a_{cm})_x = a$ y $(a_{cm})_y = 0$ aplicando la Ec. (5-29), las ecuaciones del movimiento son:

$$\Sigma F_x = m(a_{cm})_x \quad ; \quad P - f = ma_{cm} \qquad (5\text{-}35)$$

$$\Sigma F_y = m(a_{cm})_y \quad ; \quad N - m_g = 0 \qquad (5\text{-}36)$$

$$\Sigma M_{cm} = I_{cm}\alpha \quad ; \quad f \cdot r = I_{cm}\alpha \qquad (5\text{-}37)$$

Las incógnitas son f; N, α y a_{cm}.

El disco rueda sin reslizar si la fuerza de fricción en el centro instantáneo C_I, es lo suficientemente grande para matener ese punto instantáneamente en reposo.

El valor de f debe ser $0 < f \leq \mu_{est.}(N)$, para que no ocurra deslizamiento y la aceleración $a_{cm} = r\alpha$. Si

f> μ_{est} (N) el disco desliza conforme rueda y hay que trabajar de nuevo al problema.

Como f es generalmente desconocida, es más conveniente eliminar esta fuerza de fricción tomando momento alrededor del centro instantáneo C_I y la Ec. (5-37) se transforma en $\Sigma Mc_I = Ic_I\alpha$

Cuando el deslizamiento es inminente, la fuerza de roce alcanza su valor máximo $F_{max} = \mu_{est}$ (N) y se le puede obtener de N y $a_{cm} = r\alpha$.

En caso de deslizamiento α y a_{cm} son independientes y no se aplica $a_{cm} = r\ \alpha$. Se utiliza entonces $f_{ci} = \mu_{ci}N$ con las Ecs. (5-35); (5-36) y 5-37).

Al no saber si un disco o cilindro desliza o no, se supone primero que el disco rueda sin deslizar.

Si $f \leq \mu_{ci}N$ la suposición es correcta.

Si $f > \mu_{ci}N$ la suposición es incorrecta.

y se debe resolver todo como si el disco girara y se deslizara.

En el caso especial de que la rueda o disco esté desequilibrado o no balanceado y ruede sin deslizar, el centro de masa c_m no coincide con el centro geométrico c_g y la relación $a_{cm} = r\alpha$ no es válida Fig. 5.12. En su lugar se utiliza una relación similar para encontrar la magnitud de la aceleración del centro geométrico c_g, así:

$$a_{cg} = r\alpha$$

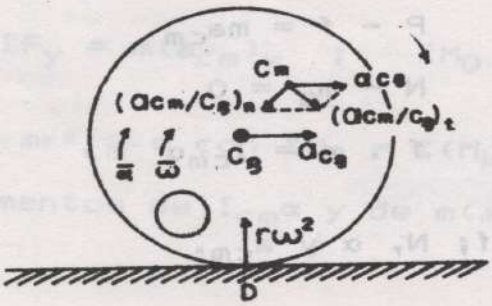


Fig. 5.12. Movimiento de rodamiento de una rueda no equilibrada o desbalanceada.

La aceleración del centro de masa c_m es, de acuerdo a la fórmula de la aceleración relativa, la suma

vectorial de la aceleración del centro geométrico c_g y la aceleración relativa de c_m con respecto a c_g, así:

$$\bar{a}_{cm} = \bar{a}_{cg} + \bar{a}_{cm/cg} = \bar{a}_{cg} + [(\bar{a}_{cm/cg})_n + (\bar{a}_{cm/cg})_t] \quad (5\text{-}38)$$

las direcciones de éstas aceleraciones están indicadas en la Fig. 5.12 y sus magnitudes son:

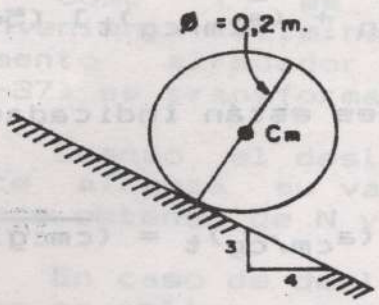
$$a_{cg} = r.\alpha; \quad (a_{cm/cg})_n = (\overline{cmcg})w^2; \quad (a_{cm/cg})_t = (\overline{cmcg})\alpha.$$

De acuerdo con la Fig. 5.12 se observa que el centro de masa C_m no tiene movimiento rectilíneo y además que la aceleración del punto de contacto D, entre rueda o disco y superficie, no se dirige hacia el punto c_m, salvo el caso especial en que los puntos c_m, c_g y D esten alineados.

Las ecuaciones generales para éste movimiento son:

$$\Sigma\bar{F} = m\bar{a}_{cm} \quad ; \quad \Sigma\bar{M}_{cm} = I_z\,\bar{\alpha} \qquad (5\text{-}39)$$

donde el eje z es perpendicular al plano del movimiento en el punto c_m.

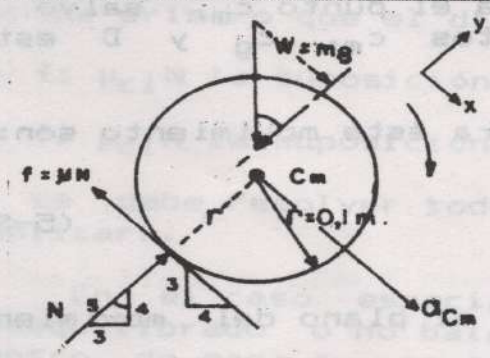


Ejemplo 5.12.

El cilindro homogéneo de la figura tiene una masa de 5 Kgs. determine:

a) El μ_{min} entre el cilindro y el plano inclinado necesario para que el cilindro ruede sin deslizar durante su descenso por el plano inclinado, partiendo del reposo.

b) Aceleración de c_m cuando el cilindro rueda sin deslizar.



Solución:

m = 5 Kgs; Ø = 0,2 m

Como no hay deslizamiento, entonces:

$a_{cm} = r\alpha = 0,1\ \alpha$ (1)

$+\searrow \Sigma F_x = ma_{cm}$

$(3/5)(mg) - f = m\ a_{cm}$ (2)

$\curvearrowleft +\Sigma M_{cm} = I_{cm}\ \alpha = [\frac{1}{2}\ mr^2]\alpha$

$r\ .\ f = [\frac{1}{2}\ m\ r^2]\ (a_{cm}/r)$ (3)

Reemplazando (3) en (2) se tiene:

$3/5(mg) = 3f$, donde $f = 1/5mg = (5 \times 9,8)/5 = 9,8$ New

En (3); $a_{cm}=2\ f/m = (2 \times 9,8)/5 = 3,92$ m/seg² ====>

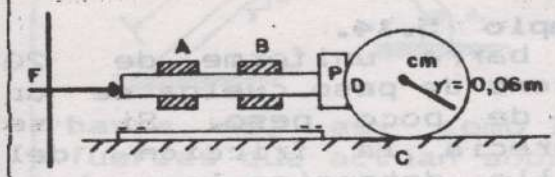
$\bar{a}_{cm} = 3,92$ m/seg² $\searrow$ 4, 3

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$ entonces

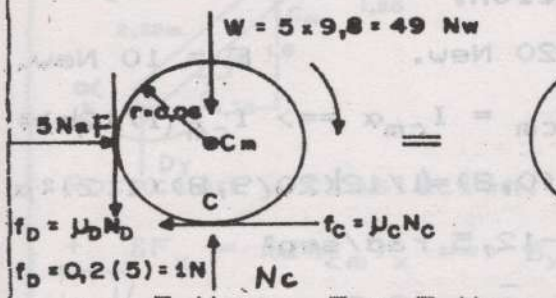
$N - mg\ (4/5) = 0$; $N = 4/5\ (5x9,8) = 39,20$ New.

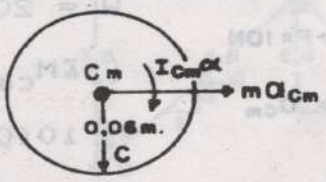
y como $f = \mu.N$, entonces $\mu_{min} = f/n = 9,8/39,2 = 0,25$

Ejemplo 5.13.



Una esfera de 5 Kgs de masa que está en reposo sobre una superficie horizontal es empujada hacia la derecha mediante un pistón P con una fuerza F = 5 Newtons. Si la pelota rueda sin deslizar en C y μ = 0,20 entre el piston y la pelota en D.
Calcule la velocidad del centro de masa C_m, después que el pistón se mueve 0,08m ; Desprecie la masa del pistón y suponer que las guías en A y B son lisas.





Solución:

$5a_{cm} = 5(r.\alpha)$

$I_{esf} = 2/5 m r^2$

m = 5 Kgs F = 5 New
μ_D = 0,20 x = 0,08 m

Como no ocurre deslizamiento, entonces

$a_{cm} = r.\alpha = 0,06\ \alpha$ (1)

$(+\circlearrowleft) \Sigma M_C = (\Sigma M_k)_C$ por lo tanto

$5(0,06) - 0,2x5(0,06) = (2/5)5(0,06)^2\alpha + 5[0,06.\alpha](0,06)$

$\alpha = 9,52\ rad/seg^2$ ===> $\alpha = 9,52\ rad/seg^2$ ↻

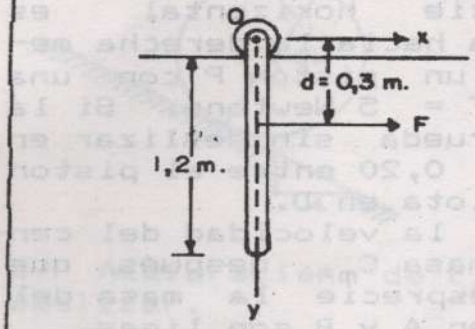
Reemplazando en (1) se tiene

$a_{cm} = 0,06\ (9,52 = 0,57\ m/seg^2$

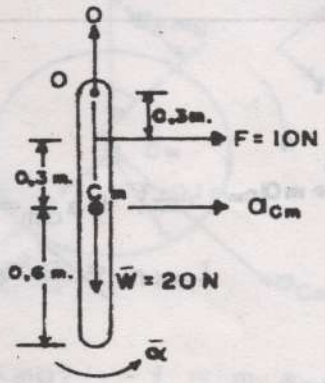
Pero $v^2_f = v^2_i + 2a_{cm}(x)$

$v^2_f = 0 + 2(0,57)(0,08) = 0,0914\ m^2/seg^2$ así

$v_f = 0,30\ m/seg$



Ejemplo 5.14.
Una barra uniforme de 20 Newtons de peso cuelga de un eje de poco peso. Si se desprecia la fricción del rodillo, determine la aceleración angular de la barra y la aceleración del rodillo debido a la fuerza. F=10 Newtons



Solución:

W = 20 New. F = 10 New.

$(+\Sigma M_{cm} = I_{cm}\alpha \Rightarrow I_{cm} = (1/12)ml^2$

$-10(0,3) = (1/12)(20/9,8)(1,2)^2\alpha$

$\alpha = -12,5 \text{ rad/seg}^2$

$\bar{\alpha} = 12,5 \text{ rad/seg}^2$)

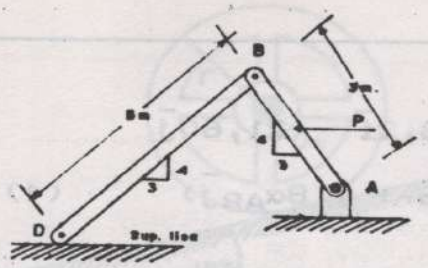
$\rightarrow +\Sigma F_x = m(a_{cm}x) = m(a_{cm})$

$10 = (20/9,8)a_{cm}$; $\bar{a}_{cm} = 4,9 \text{ m/seg}^2$ ---▶

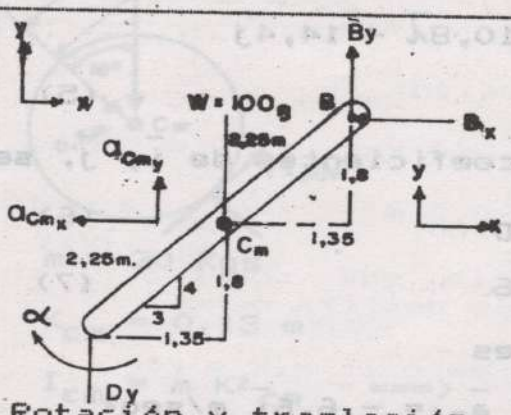
asumiendo que parte del reposo y por cinemática

$\bar{a}_O = \bar{a}_{cm} + \bar{a}_{O/cm} = \bar{a}_{cm} + \bar{\alpha} \times \bar{r}_{cmO} - r_{cmO} \cdot w^2 \bar{i}$

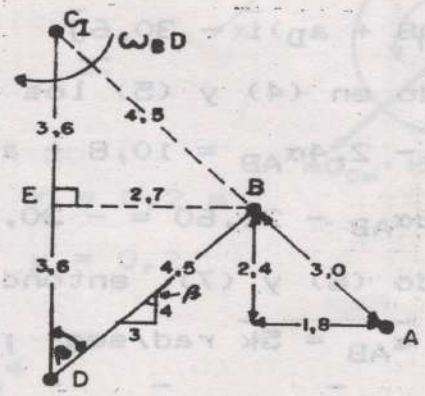
$\bar{a}_O = \bar{a}_{cm} + (-\alpha k) \times (0,6j) = 4,9\bar{i} + 7,5\bar{i} = 12,4\bar{i} \text{ m/seg}^2$



Ejemplo 5.15.
La barra uniforme BD de masa 100 Kgs, en la posición mostrada tiene una velocidad y aceleración angular de 2 rad/seg y 6 rad/seg² en sentido horario, respectivamente Calcule la velocidad y aceleración angular de la barra AB, así como las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre BD.



Rotación y traslación.



Solución:

$\sin\beta = 3/5 = BE/4,5$

$BE = 2,7\ m$

$\cos\beta = 4/5 = ED/4,5$

$ED = 3,6m$

$I_{cm} = \frac{1}{12} m \ell^2$

$$\overleftarrow{+}\ \Sigma F_x = m(a_{cm})_x \Rightarrow B_x = 100\ a(_{cm})_x \qquad (1)$$

$$+\downarrow \Sigma F_y = m(a_{cm})_y \Rightarrow 100g - B_y - D_y = 100\ (a_{cm})_y \qquad (2)$$

$$\circlearrowleft + \ \Sigma M_{cm} = I_{cm}\alpha \Rightarrow D_y\ (1,35) - B_y\ (1,35) - B_x\ (1,8) = (1/12)(100)\ (4,5)^2 \alpha_{BD} \qquad (3)$$

Para encontrar las aceleraciones del centro de masa y la aceleración angular de la barra BD, se utiliza la cinématica,
Se sabe que: $\bar{w}_{BD} = 2$ rad/seg ; $\bar{\alpha}_{BD} = 6$ rad/seg² entonces en la figura b, se tiene:

Barra BD
$v_B = B_{CI}(W_{BD}) = 4,5(2) = 9 m/seg^2$; Barra AB $v_B = AB.w_{AB} = 3\ w_{AB}$

$\bar{w}_{AB} = 3$ rad/seg.

Barra AB:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{B/A} = \bar{\alpha}_{AB} \times \bar{r}_{AB} - w^2_{AB} \cdot \bar{r}_{AB}$$

$$= \alpha_{AB}\bar{K}_x(-1,8\bar{i} + 2,4\bar{j}) - (3)^2 \cdot (-1,8\bar{i} + 2,4\bar{j})$$

Continuación Ejemplo 5.15

$$\bar{a}_B = -1,8\alpha_{AB}\bar{j} - 2,4\alpha_{AB}\bar{i} + 16,2\bar{i} - 21,60\bar{j}$$

$$= (16,2 - 2,4\alpha_{AB})\bar{i} - (21,6 + 1,8\alpha_{AB}\bar{j}) \qquad (4)$$

Barra BD:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_D + \bar{a}_{B/D} = \bar{a}_D - 6\bar{k}_x(2,7\bar{i}+3,6\bar{j}) - (2)^2.(2,7\bar{i}+3,6\bar{j})$$

$$\bar{a}_B = a_D\bar{i} - 16,2\bar{j} + 21,6\bar{i} - 10,8\bar{i} - 14,4\bar{j}$$

$$= (10,8 + a_D)\bar{i} - 30,6\bar{j} \qquad (5)$$

Igualando en (4) y (5) los coeficientes de $\bar{i}$, $\bar{j}$, se tiene:

$\bar{i}$) $16,2 - 2,4\alpha_{AB} = 10,8 + a_D$ (6)

$\bar{j}$) $-1,8\alpha_{AB} - 21,60 = -30,6$ (7)

Igualando (6) y (7), entonces

$$\alpha_{AB} = 5\bar{k} \text{ rad/seg}^2 \; ; \; \bar{a}_D = -6,6\bar{i} \text{ m/seg}^2$$

$$\bar{a}_{cm} = \bar{a}_B + \bar{a}_{cm/B} = \bar{a}_B + \bar{\alpha}_{Bcm} - \bar{r}_{Bcm} - w^2_{Bcm} \cdot \bar{r}_{Bcm}$$

$$\bar{a}_{cm} = 4,2\bar{i} - 30,6\bar{j} - 6\bar{k} \times (-1,35\bar{i} - 1,8\bar{j}) - (2)^2.(1,35\bar{i} - 1,8\bar{j})$$

$$\bar{a}_{cm} = 4,2\bar{i} - 30,6\bar{j} + 8,1\bar{j} - 10,8\bar{i} + 5,4\bar{i} + 7,2\bar{j}$$

$$\bar{a}_{cm} = (-1,2\bar{i} - 15,3\bar{j}) \text{m/seg}^2 \; ; \text{ por lo tanto}$$

$$(\bar{a}_{cm})_x = -1,2\bar{i} \quad ; \quad (\bar{a}_{cm})_y = -15,3\bar{j}$$

Reemplazando valores en las (1), (2) y (3) y resolviendo se tiene:

$$B_x = 100\, a_{cm\,x} = 100(1,2) = 120 \text{ New}$$

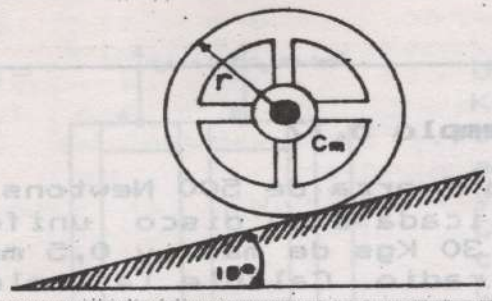
$$\bar{B}_x = 120 \text{ New} \leftarrow$$

$$980 - B_y - D_y = 100\,(a_{cm})_y = 100(15,3) = 1530$$

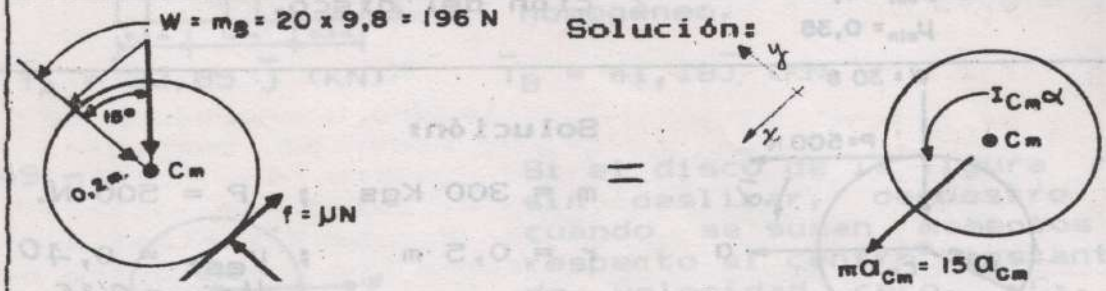
$$1,35D_y - 1,35B_y - 1,8(120) = 168,75 \times 6 = 1.012,50$$

$$\bar{B}_y = -730\bar{j} \text{ (New)} = 730 \text{ New} \downarrow$$

$$\bar{D}_y = 180\bar{j} \text{ (New)} = 180 \text{ New} \uparrow$$



Ejemplo 5.16.
Una rueda cuya masa es de 20 Kgs, tiene un radio r = 0,2 m y un radio de giro K_{cm} = 0,13m. Si μ_{est} entre la rueda y el plano inclinado es 0,2. Calcule la aceleración angular de la rueda conforme rueda hacia abajo del plano.



Solución:

m = 20 Kgs r = 0,2 m

K_{cm} = 0,13 m μ = 0,2

$I_{cm} = m K^2_{cm}$ ===>

$I_{cm} = 20(0,13)^2 = 0,34 m^4$

Se asume que la rueda no desliza, entonces:

$$a_{cm} = r.\alpha = 0,2\alpha \quad (1)$$

$+\swarrow \Sigma F_x = m(a_{cm})_x$ ===> $20(9,8)\text{sen}15°$; $f = 20\,(a_{cm})$ (2)

$+\nwarrow \Sigma F_y = m(a_{cm})_y = 0$ ==> $N - 20 \times 9,8(\cos 15°) = 0$ (3)

$(+ \Sigma M_{cm} = I_{cm}\alpha$ ===> $f(0,2) = (0,34)\alpha$ (4)

Resolviendo las ecuaciones de (1) a (4) se tiene:

De (3) N = 189,32 New

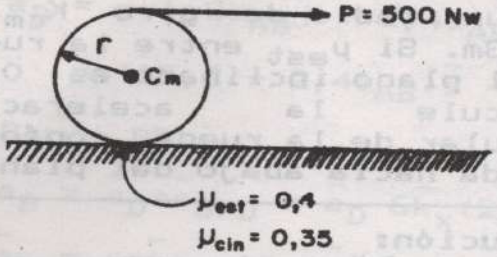
De (2) y (4); α=8,90rad/seg²; a_{cm}=1,78m/seg² ;

f = 15,13 New

Comprobación.

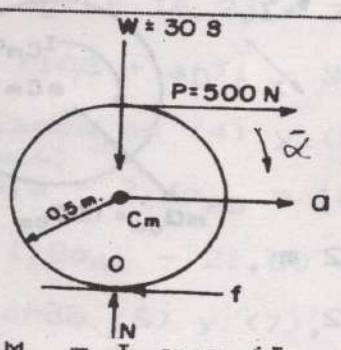
$f_{max} = \mu_{est} N = 0,2\ (189,32) = 37,86$ New.

como $f < f_{max}$ no hay deslizamiento y por lo tanto la Ec. (1) es válida.



Ejemplo 5.17

Una fuerza de 500 Newtons es aplicada a un disco uniforme de 30 Kgs de masa y 0,5 metros de radio. Calcule la aceleración del disco.



Solución:

m = 300 Kgs ; P = 500 N.

r = 0,5 m ; μ_{est} = 0,40

μ_{cin} = 0,35

Habría que comprobar si el disco desliza o no.

$\circlearrowleft + \Sigma M_O = I_O\alpha = (I_{cm} + r^2 m)\alpha$ pero $I_c = (\frac{1}{2})m\,r^2$;

$500(1) = [(\frac{1}{2})30\,(0,5)^2 + (0,5)^2\,(30)]\alpha$;

$\bar{\alpha} = 44,44$ rad/seg^2 $\circlearrowright$

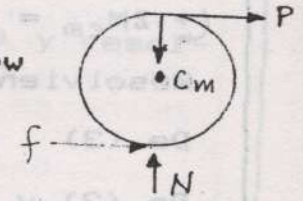
Si se supone que rueda sin deslizar, $a = r\alpha$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = ma_x = ma = mr\alpha$;

$500 - f = 30(0,5)(44,44)$; $f = 500 - 666.67 = -166,67$N

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$; $N = W = 30 \times 9,8 = 294$ New

$f_{max} = (\mu_{est})\,N = 0,4\,(294) = 117,60$ New



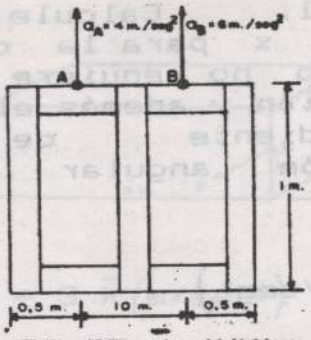
Como $f > f_{mx}$ el disco desliza conforme rueda.

Se asume $f = \mu_{ci} N = (0,35)(294) = 102,90$ New; ya que $a \neq r\alpha$

Por lo tanto $\xrightarrow{+}$ $\Sigma F_x = ma_x = f + P$, de esta forma

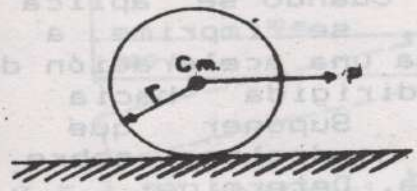
$a_x = a_{cm} = (f+P)/m = (102,9 + 500)/30) = 20,10$ New

Problemas/sec (5.9).

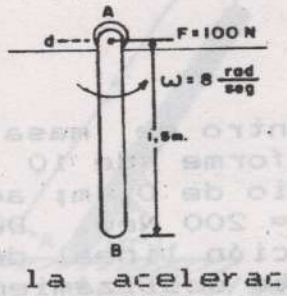
5.48.- 

Un embalaje de tablas de 5.000 Kgs de masa está en reposo cuando los cables A y B le dan aceleraciones hacia arriba de 4 y 6 m/seg² respectivamente. Calcule la tensión en cada cable. La carga puede ser considerada como cuerpo homogéneo.

R: $\bar{T}_A = 32,85\ \bar{j}$ (KN) $\bar{T}_B = 41,18\bar{J}$ (KN.

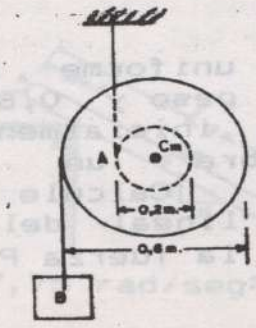
5.49.- 

Si el disco de la figura rueda sin deslizar, demuestre que cuando se suman momentos con respecto al centro instantáneo de velocidad cero, C_I, es posible usar la ecuación de momento $\Sigma M_{cI} = I_{cI}\alpha$, I_{cI} representa el momento de inercia del disco con respecto al eje instantáneo de velocidad cero.

5.50.- 

La barra uniforme AB de masa 10 Kgs, está articulada en A de un rodillo que se mueve sobre un plano horizontal. En el instante indicado la barra se mece en la posición vertical con una w = 8 rad/seg. Si F horizontal es aplicada al rodillo en ese instante, calcule la aceleración del rodillo. desprecie masa, tamaño del rodillo y d en el cálculo.

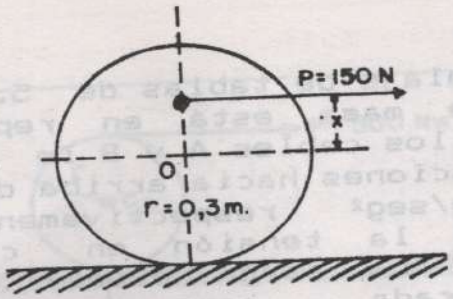
R: $\bar{a}_A = 50\bar{i}$ m/seg²

5.51.- 

El cilindro homogéneo A de masa 40 Kgs tiene una ranura pequeña, que no afecta el cálculo de I, en donde se arrolla el cable flexible. En la posición indicada en la figura la aceleración del centro de masa del cilindro es 3 m/seg² hacia arriba. Calcule la masa del cuerpo B.

R: $m_B = 138,42$ Kgs.

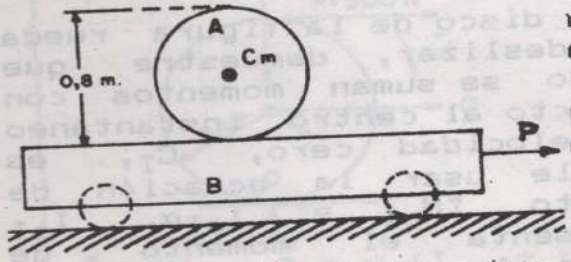
5.52.- Una esfera sólida y homogénea de 40 Kgs de masa, gira sin deslizar sobre el plano horizontal. Calcule la distancia x para la cual el movimiento no requiere fuerza de fricción y además el valor correspondiente de la aceleración angular de la esfera.



R: $x = 0,12$ m. ; $\bar{\alpha} = 12,50$ rad/seg²

5.53.- Un cilindro homogéneo A de 50 Kgs de masa, se encuentra en reposo sobre la plataforma móvil B. Cuando se aplica la fuerza P, se imprime a la plataforma una aceleración de 6 m/seg² dirigida hacia la derecha. Suponer que el cilindro no desliza sobre la plataforma. Determine:

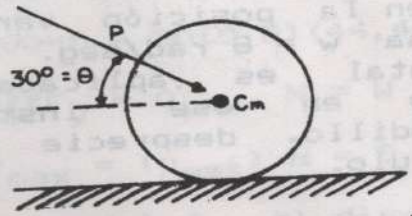
a) Aceleración del centro de masa del cilindro.
b) Fuerza de fricción que actúa sobre el cilindro.



R: a) $\bar{a}_{cm} = 2\bar{i}\ (m/seg^2)$

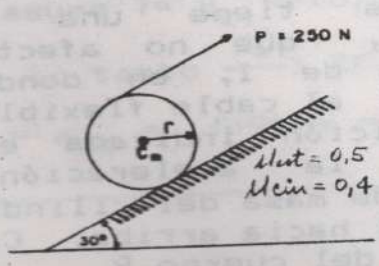
b) $\bar{f} = 100\bar{i}$ Newtons.

5.54.- En el centro de masa de un disco uniforme de 10 Kgs de masa y radio de 0,4m; actúa una fuerza P = 200 New. Determine la aceleración lineal del disco si no existe deslizamiento.



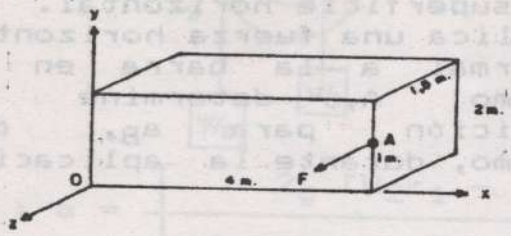
R: $\bar{a} = 11,55\ (m/seg^2)$.

5.55.- Un disco uniforme de 50 Newtons de peso y 0,6 m de radio está inicialmente en reposo sobre un plano inclinado. Calcule la aceleración lineal del disco causada por la fuerza P = 250 New.



R: $\bar{a}_{cm} = 47,49$ m/seg²

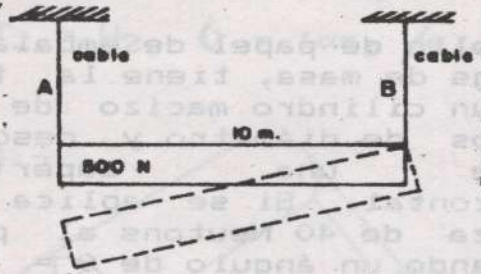
5.56.-



Una caja tiene una masa de 300 Kgs uniformemente distribuida. La caja descansa sobre esferas y puede rodar libremente en alguna dirección. determine la aceleración del centro de masa debido a la fuerza F = 900 New. aplicada al punto A.

R: $\bar{a}_{cm} = 3\,\bar{K}\,(m/seg^2)$

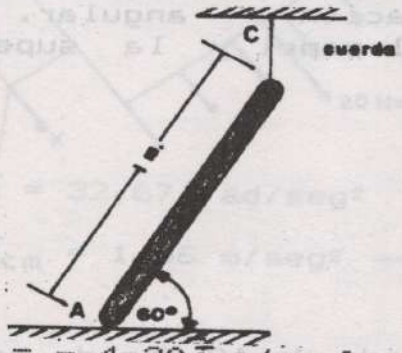
5.57



Calcular la tensión en el cable B y la aceleración angular del andamio inmediatamente después que se rompe el cable A. Asumir que el andamio es una barra delgada uniforme.

R: $\bar{\alpha} = 1,47\ rad/seg^2$.

5.58.-

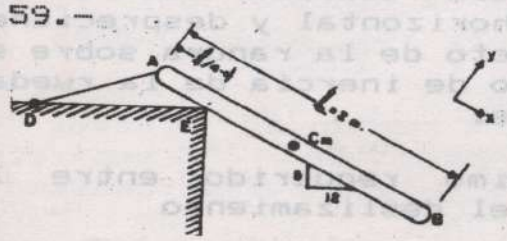


La barra AB homogénea se mantiene en equilibrio apoyada sobre el plano horizontal liso y sostenida por la cuerda BC. determine la aceleración del centro de masa y la aceleración angular de la barra que ase genera al cortar la cuerda, así como la reacción en el extremo A.

R: $\bar{a}_{cm} = -4,20\bar{j}\ m/seg^2$.

$\bar{\alpha} = -16,80\bar{K}\ rad/seg^2$.

5.59.-

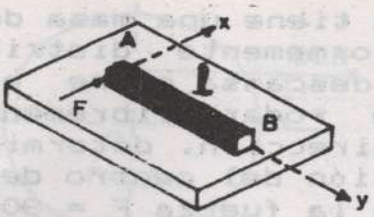


La barra AB homogénea se mantiene en equilibrio apoyada en el vértice E y sostenido por la cuerda AD. Calcule la aceleración angular de la barra cuando se corta la cuerda y la reacción en E.

R: $\bar{\alpha} = 7,75\ rad/seg^2$

$\bar{N} = 5,17\ m\ (New)$

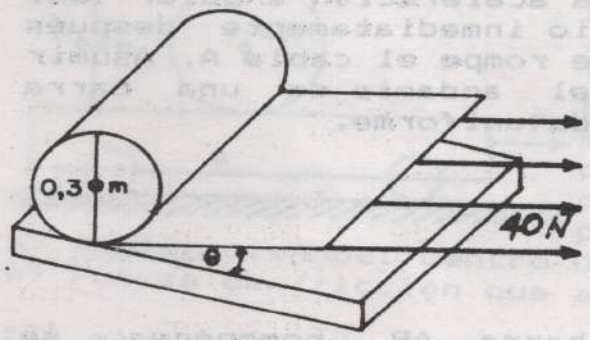
5.60.-



La barra uniforme de longitud l y masa m está en reposo sobre una superficie horizontal. Si se aplica una fuerza horizontal F normal a la barra en el extremo A, determine la exposición para a_B, del extremo, durante la aplicación de F.

R: $\bar{a}_B = -2\,(F/m)\,\bar{i}$

5.61.-

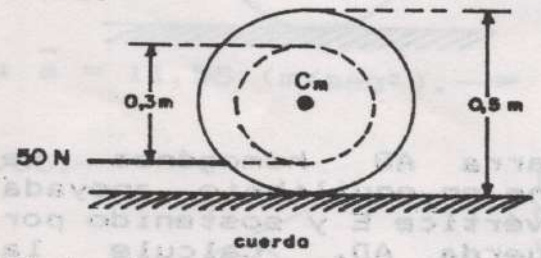


Un rollo de papel de embalar de 15 Kgs de masa, tiene la forma de un cilindro macizo de 0,3 metros de diámetro y descansa sobre una superficie horizontal. Si se aplica una fuerza de 40 Newtons al papel formando un ángulo de $\theta = 30°$, determine la aceleración inicial a_{cm} del centro del rollo y la correspondiente aceleración angular. El coeficiente de fricción entre el papel y la superficie horizontal es 0,2.

R : $\bar{a}_{cm} = 0{,}62\ m/seg^2 \longrightarrow$

$\bar{\alpha} = 12{,}98\ rad/seg^2$)

5.62.-



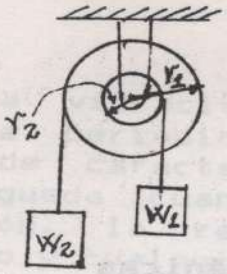
Una rueda de 10 Kgs de masa es un cilindro homogéneo con una ranura en la cual se arrolla la cuerda. Suponiedo que la rueda gira sin deslizar sobre el plano horizontal y despreciando el efecto de la ranura sobre el momento de inercia de la rueda, calcule:

a) Aceleración de C_m.
b) Coeficiente de fricción mínimo requerido entre la rueda y el plano para evitar el deslizamiento

R: a) $\bar{a}_{cm} = 0{,}83\ m/seg^2 \longleftarrow$

b) $\mu_{min} = 0{,}425$.

5.63.-



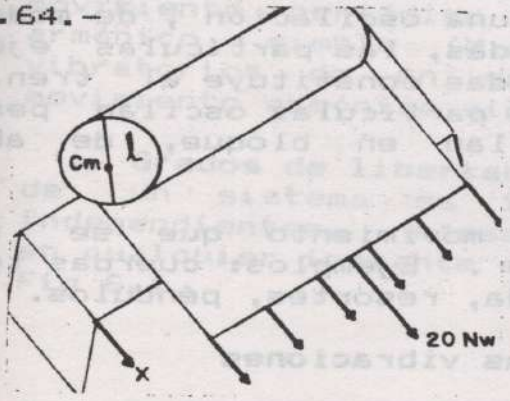
Determine la aceleración angular en la polea y la tensión en ambas cuerdas; considere las dos poleas como un cilindro simple y desprecie la fricción.

$$R: \alpha = \left[\frac{2g\,[W_2 r_1 - W_1 r_2]}{r^2_1\,[W_p + 2W_2] + 2W_1 r^2_2} \right] \bar{K}$$

$$T_1 = W_1 \quad (1 + (\alpha r_2 / g).$$

$$T_2 = W_2 \quad (1 - (\alpha r_1 / g).$$

5.64.-



Un rodillo de 50 Newtons de peso y diámetro 24 cms, reposa sobre la mesa como se muestra en la figura. Si la fuerza aplicada es de 20 Newtons y el coeficiente de fricción entre el rodillo de papel y la mesa es 0,20, determine la aceleración angular α del rodillo y la aceleración lineal del centro de masa.

R : $\bar{\alpha} = 32{,}67$ rad/seg²

$\bar{a}_{cm} = 1{,}96$ m/seg² ——►

Capítulo 6

Vibraciones Mecánicas

6.1- Aspectos generales

Un cuerpo oscila cuando ejecuta un movimiento de vaiven a uno y otro lado de la posición cero o de equilibrio como en el movimiento de un péndulo y de un resorte.

La ondulación consiste en la transmisión del movimiento de unas partículas a otras. Al paso de una onda cada partícula ejecuta una oscilación , de modo que si se trata de un tren de ondas, las partículas ejecutan tantas oscilaciones como ondas constituye el tren. En este tipo de movimiento las partículas oscilan pero no todas a la vez; no oscilan en bloque, de ahí la asignación de ondulatorio.

Una vibración es el movimiento que se repite periódicamente con el tiempo . Ejemplos: cuerdas tensas, cuerpos sonoros, viga cargada, resortes, péndulos.

Ventajas y desventajas de las vibraciones

Ventajas: En las máquinas de ensayo, en circuitos de ingeniería electrónica, vibradores para compactar concreto, separar granos y clasificar materiales por tamaño; martinetes y en dinámica de suelos.

Desventajas: En máquinas y estructuras, porque aumentan los esfuerzos mecánicos y las pérdidas de energía que los acompañan e inducen fatiga en los materiales, que apresuran el tiempo de su falla.

En general hay dos tipos de vibraciones: libres y forzadas; que pueden ser a su vez amortiguadas y no amortiguadas.

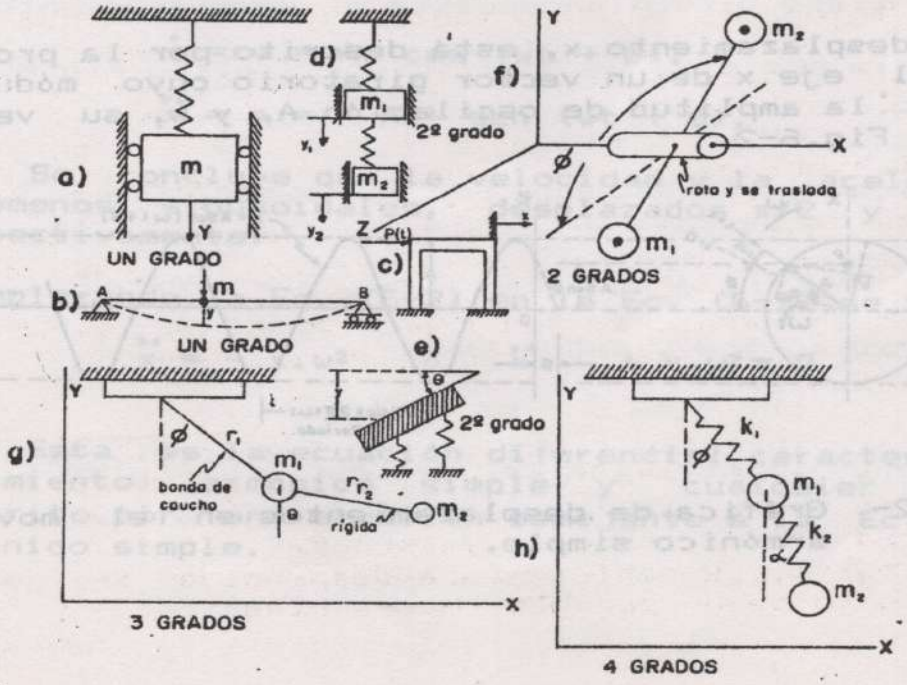
La vibración libre ocurre cuando el sistema vibra bajo la acción de fuerzas inherentes al mismo sistema (fuerzas restauradoras, elásticas y gravitacionales), en ausencia de fuerzas externas. Son de caracter transitorio, ejemplo: masa suspendida de un resorte, movimiento de un péndulo, barra elástica.

La vibración forzada es causada por una fuerza externa periódica o intermitente aplicada al sistema. Son de carácter permanente. La vibración es no amortiguada cuando puede despreciarse el efecto de la fricción, la resistencia del aire, el amortiguamiento viscoso y cualquier otra fuerza resistiva. La vibración es amortiguada si el efecto de cualquiera de las fuerzas anteriores es apreciable.

En la práctica todas las vibraciones son amortiguadas, porque siempre existe alguna fuerza de fricción que amortigue y detenga eventualmente el movimiento, aunque su efecto puede despreciarse en ciertos analisis.

Movimientos periódicos. Son aquellos que se repiten de la misma manera, en iguales intervalos de tiempo. El movimiento periódico más sencillo es el movimiento armónico simple (M.A.S.) y el de muchos sistemas vibratorios de un grado de libertad se aproxima al movimiento armónico simple (M.A.S.).

Grados de libertad. El número de grados de libertad de un sistema es igual al número de coordenadas independientes, necesarias para especificar su posición en cualquier instante o describir el movimiento.Ejemplos. Fig 6.1



Se estudiará solo vibraciones de una partícula o de un cuerpo rígido con un solo grado de libertad.

6.2- Movimiento armónico simple. (M.A.S.).

El estudio de éste movimiento es fundamental y muy útil para el analisis de los sistemas vibratorios que vamos a emprender. (Con un grado de libertad).

El M.A.S. es la forma más simple del movimiento periódico y se representa por la función:

$$x = a \operatorname{sen} wt + b \cos wt \qquad (6\text{-}1)$$

donde a,b son constantes de integración que dependen de las condiciones iniciales del movimiento.

Todos los movimientos armónicos son periódicos pero no todos los movimientos periódicos son armónicos. La solución de la Ec.(6-1) se puede realizar por sustitución directa de $w=\sqrt{k/m}$ como se verá posteriormente.

Por conveniencia, la Ec.(6-1) también puede expresarse como una función sinusoidal simple, por la introducción de las nuevas constantes A y Ø por determinarse en lugar de a y b, tales que $a=A\cos Ø$ y $b=A\operatorname{sen} Ø$, reemplazando en la Ec.(6-1) se tiene:
$x=A\cos Ø.\operatorname{sen} wt+A.\operatorname{sen} Ø.\cos wt.$

Como $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\operatorname{sen}\beta$ entonces

$$x = A \operatorname{sen}(wt + Ø) \qquad (6\text{-}2)$$

El desplazamiento x, está descrito por la proyección sobre el eje x de un vector giratorio cuyo módulo sea igual a la amplitud de oscilación A, y w, su velocidad angular. Fig.6-2.

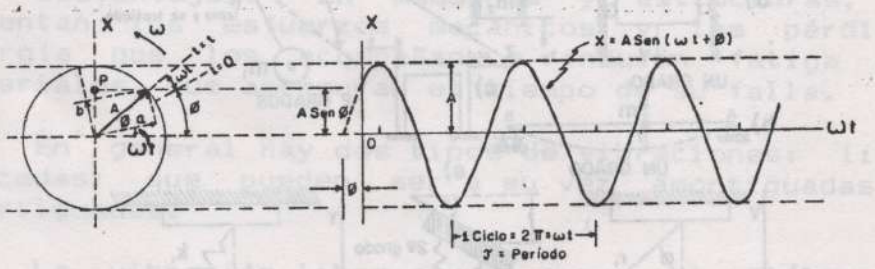


Fig. 6.2- Gráfica de desplazamientos en el movimiento armónico simple.

La elongación es el valor de x en un instante cualquiera y es máxima cuando y= x. La constante Ø es llamada ángulo de fase, la cual define el desplazamiento inicial A sen Ø de la masa cuando t=0.

En la Fig. 6.2 se tiene que

$$A^2 = a^2+b^2 \text{ ó } A= \sqrt{a^2+b^2} \qquad (6-3)$$

y además $tg\emptyset = b/a$ ó $\emptyset = \text{arc tg } (b/a)$ (6-3')

El tiempo que transcurre para un ciclo de movimiento se llama período, simbolizado por τ y ocurre cuando $w\tau=2\pi$, así

$$\tau=2\pi/w \qquad (6-4)$$

La frecuencia f se define como el número de ciclos realizados por unidad de tiempo. Se mide en ciclos/ seg= Herz (HZ) entonces

$$f=1/\tau = w/2\pi \qquad (6-5)$$

w se llama frecuencia circular del movimiento.

La velocidad y aceleración del M.A.S. pueden determinarse derivando la Ec(6-2); dos veces respecto al tiempo así:

$$\dot{x} = v = Aw \cos (wt + \emptyset). \qquad (6-6)$$

$$\ddot{x} = a = - Aw^2 \text{ sen } (wt + \emptyset). \qquad (6-7)$$

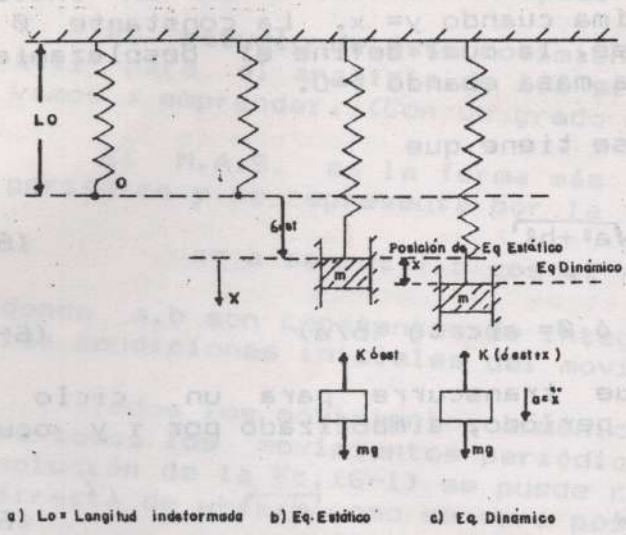
Se concluye que la velocidad y la aceleración son fenómenos sinusoidales, desplazados $\pi/2$ y π radianes respectivamente.

Reemplazando la Ec. (6-2) en la Ec. (6-7) se tiene:

$$\ddot{x} = - x.w^2 \quad \text{ó} \quad \ddot{x} + x.w^2 = 0 \qquad (6-8)$$

Esta es la ecuación diferencial característica del movimiento armónico simple y cualquier movimiento descrito por una ecuación semejante a la Ec. (6-8) es armónico simple.

6.3- Vibraciones libres sin amortiguamiento



Sea un cuerpo de masa m suspendido de un resorte de rigidez k y masa despreciable, que se mueve verticalmente. La fig. 6.3 ilustra las diferentes posiciones del mismo. Si éste cuerpo se desplaza inicialmente y se suelta, vibrará libremente, ya que las fuerzas externas son cero y no tendrá amortiguamiento si la amplitud de vibración permanece constante.

Fig.6.3- Posiciones de la masa m para casos de equilibrio estático y dinámico.

Si x representa el desplazamiento de la masa desde su posición de equilibrio, la fuerza ejercida por el resorte sobre ella será:

$$F = - kx \qquad (6\text{-}9)$$

El signo negativo de la fuerza del resorte se debe a que ella tiene dirección opuesta al desplazamiento.

En la posición de equilibrio estático Fig 6.3.b se tiene:

$$mg = k\delta_{est} \qquad (6\text{-}10)$$

Aplicando la segunda ley de Newton, Fig 6.3.c., al movimiento de la masa m,

$$+\downarrow \Sigma F_x = ma \; ; \quad mg - k(\delta_{est} + x) = m\ddot{x} \qquad (6\text{-}11)$$

Reemplazando Ec(6-8), entonces

$$-kx = m\ddot{x} \text{ ó } - kx = m(d^2x/dt^2) \qquad (6\text{-}12)$$

Introduciendo la notación de frecuencia circular w_n

$$w^2_n = k/m \qquad (6\text{-}13)$$

La Ec. (6-12) se convierte en

$$d^2x/dt^2 + w^2_n x = 0 \qquad (6\text{-}14)$$

que por comparación con la Ec. (6-8), se concluye que el movimiento de la masa atada al resorte es armónico simple.

La Ec. (6-14) es una ecuación diferencial lineal de segundo orden, homogénea, con coeficientes constantes, cuya solución general es la Ec. (6-1).

$$x = a \operatorname{sen} w_n t + b \cos w_n = a \operatorname{sen}(\sqrt{k/m})t + b \cos(\sqrt{k/m})t$$

$$x = A \operatorname{sen} (w_n t + \emptyset) \qquad (6\text{-}15)$$

Como ésta vibración libre sin amortiguamiento tiene las mismas caracteristicas del movimiento armónico simple, se pueden aplicar directamente las Ecs. (6-4) y (6-5) conocida la frecuencia circular w_n, para escribir las ecuaciones de período de vibración τ y frecuencia natural f, así

$$\tau = 2\pi/w_n = 2\pi/\sqrt{k/m} = 2\pi\sqrt{m/k} = 2\pi\sqrt{W/\ kg}$$

$$f = w_n/2\pi = 1/2\pi\sqrt{k/m}\ \text{ciclos/segundos} = \text{Hertz} \qquad (6\text{-}16)$$

La Ec. (6-16) se puede expresar en términos de la deflección estática δ_{est}, que representa el desplazamiento de la masa m bajo su propio peso W = mg, así que

$$\delta_{est} = W/k = mg/k \quad \acute{o} \quad k = mg/\delta, est \qquad (6\text{-}17)$$

Reemplazándo la Ec. (6-17) en las Ecs. (6-16) y(6-13), se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \tau = 2\pi\sqrt{\delta_{est}/g}; \quad f = 1/2\pi\sqrt{g/\delta_{est}} \\ w_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{\dfrac{W/\delta_{est}}{W/g}} = \sqrt{g/\delta_{est}} \end{array}\right\} \qquad (6\text{-}18)$$

Si se quieren determinar los coeficientes a y b de la Ec. (6-15), así como la amplitud y el ángulo de fase, en el instante en que

$t = 0$; $x(0) = x_o$ y $dx(o)/dt = v_o$; entonces

$$x = a \operatorname{sen} w_n t + b \cos w_n t;\ w_n = \sqrt{k/m}$$

$$dx/dt = aw_n \cos w_n t - bw_n \operatorname{sen} w_n t$$

Para $x = x_o$ y $t = 0$, entonces $b = x_o$

Para $t = 0$ y $dx_o/dt = v_o$, entonces $a = v_o/w_n$
La solución será:

$$x = v_o/w_n \operatorname{sen} w_n t + x_o \cos w_n t$$

$$x = v_o/\sqrt{k/m}\ \operatorname{sen}\sqrt{k/m}\,t + x_o \cos \sqrt{k/m}\,(t) \qquad (6\text{-}19)$$

Por trigonometría, la Ec (6-19) puede escribirse así:

$$x = A \cos(w_n t - \emptyset) \qquad (6\text{-}20)$$

que desarrollada es $x = A \cos w_n t \cos\emptyset + A \operatorname{sen} w_n t \operatorname{sen}\emptyset$

Por proporcionalidad de coeficientes se establece que

$$x_o = A \cos\emptyset$$

$$v_o/w_n = A \operatorname{sen}\emptyset \text{ de donde}$$

$$A = \sqrt{X^2{}_o + (v_o/w_n)^2} \qquad (6\text{-}21)$$

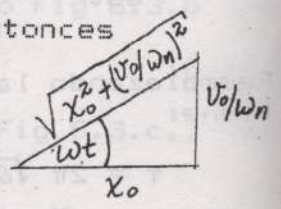
$$\emptyset = \text{arc tg } (v_o/w_n x_o) \qquad (6\text{-}22)$$

Otra forma sería derivando la Ec. (6-19)

$$x = v_o/w_n \operatorname{sen} w_n t + x_o \cos w_n t$$

$dx/dt = vo \cos w_n t - x_o w \operatorname{sen} w_n t = 0$ entonces

$$tgwt = \frac{v_o}{w_n\ x_o} = \frac{v_o/\ w_n}{x_o} \text{ o sea}$$



Por trigonometría, en la figura anterior,

$$\operatorname{sen} wt = \frac{v_o/w_n}{\sqrt{(x_o)^2+(v_o/w_n)^2}} \quad ; \quad \cos wt = \frac{x_o}{\sqrt{(x_o)^2+(v_o/w_n)^2}}$$

Para éstos valores x es máximo en la Ec (6-19) así

$$x_{max} = A = \frac{v_o}{w_n} \cdot \frac{v_o}{w_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x_o)^2+(v_o/w_n)^2}} + \frac{(x_o)^2}{\sqrt{(x_o)^2+(v_o/w_n)^2}}$$

$$x_{max} = \sqrt{(x_o)^2 + (v_o/w_n)^2} = A$$

ϕ = arc tg $v_o/x_o w_n$ igual que en las Ecs (6-21) y (6-22).

La Ec. (6-13) $(w_n)^2 = k/m$ indica que la gravedad, no influye en la frecuencia circular de un resorte en movimiento vertical. Cuando existen cambios en la dirección del movimiento de vibración de un resorte, (resortes inclinados) si influye la gravedad en su frecuencia circular o angular. Ver los resultados de éstos analisis en el apéndice B. El período de vibración depende sólo del peso W y de la constante k del resorte y es independiente de sus oscilaciones.

6.4 **Péndulo simple- (Solución aproximada)**

Existen muchos movimientos vibratorios que no pertenecen al movimiento armónico simple pero que con una aproximación pueden pertenecer a él, siempre que su amplitud permanezca constante. Un ejemplo de éste tipo es el movimiento de un péndulo simple, que consiste de una partícula de masa m suspendida del punto O por una cuerda de longitud l y de masa despreciable que puede oscilar en un plano vertical. Fig.6.4.a. Cuando el péndulo se desplaza un ángulo θ en el tiempo t, las fuerzas que actúan sobre él son su peso W = mg, la fuerza T a lo largo de la cuerda y la fuerza restauradora que actúa sobre el péndulo, que es la componente del peso, mgsen.(θ), en sentido contrario al incremento de θ. Fig. 6.4b.

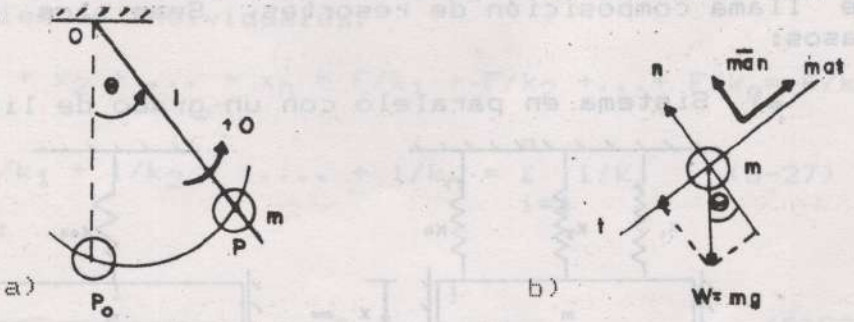


Fig. 6.4. Movimiento vibratorio de un péndulo simple

La ecuación del movimiento en la dirección tangencial es por consiguiente:

$+\nearrow \Sigma F_t = ma_t \Rightarrow -mg\,\text{sen}\theta = ma_t$ y como $a_t = l\ddot{\theta} = l\, d^2\theta/dt^2$

entonces la ecuación del movimiento es:

$$x_{max} = \sqrt{(x_o)^2 + (v_o/w_n)^2} = A$$

ϕ = arc tg $v_o/x_o w_n$ igual que en las Ecs (6-21) y (6-22).

La Ec. (6-13) $(w_n)^2 = k/m$ indica que la gravedad, no influye en la frecuencia circular de un resorte en movimiento vertical. Cuando existen cambios en la dirección del movimiento de vibración de un resorte, (resortes inclinados) si influye la gravedad en su frecuencia circular o angular. Ver los resultados de éstos analisis en el apéndice B. El período de vibración depende sólo del peso W y de la constante k del resorte y es independiente de sus oscilaciones.

6.4 **Péndulo simple- (Solución aproximada)**

Existen muchos movimientos vibratorios que no pertenecen al movimiento armónico simple pero que con una aproximación pueden pertenecer a él, siempre que su amplitud permanezca constante. Un ejemplo de éste tipo es el movimiento de un péndulo simple, que consiste de una partícula de masa m suspendida del punto O por una cuerda de longitud l y de masa despreciable que puede oscilar en un plano vertical. Fig.6.4.a. Cuando el péndulo se desplaza un ángulo θ en el tiempo t, las fuerzas que actúan sobre él son su peso W = mg, la fuerza T a lo largo de la cuerda y la fuerza restauradora que actúa sobre el péndulo, que es la componente del peso, mgsen.(θ), en sentido contrario al incremento de θ. Fig. 6.4b.

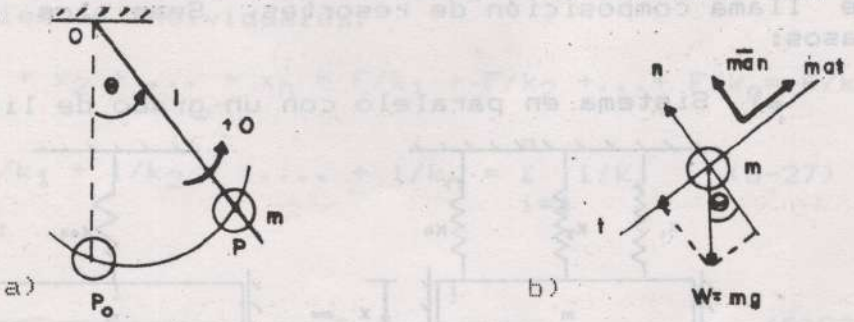


Fig. 6.4. Movimiento vibratorio de un péndulo simple

La ecuación del movimiento en la dirección tangencial es por consiguiente:

$+\nearrow \Sigma F_t = ma_t \Rightarrow -mg\,\text{sen}\theta = ma_t$ y como $a_t = l\ddot{\theta} = l\, d^2\theta/dt^2$

entonces la ecuación del movimiento es:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\,\text{sen}\theta = 0 \qquad (6\text{-}23)$$

Esta ecuación no es del tipo de la Ec. (6-14) debido a la presencia del sen θ y su solución involucraría el uso de una integral eliptica. Sin embargo si la amplitud de las oscilaciones es pequeña, sen θ≈θ [θ ≤ 20°)] con error menor que el 1%, obteniéndose

$$d^2\theta/dt^2 + (g/l)\theta = 0 \qquad (6\text{-}24)$$

La Ec. (6-24) muestra que para pequeñas oscilaciones de un péndulo éstas son armónicas, siendo $(w_n)^2 = g/l$ con período

$$\tau = 2\pi/w = 2\pi\sqrt{l/g} \qquad (6\text{-}25)$$

Se concluye que el período de un péndulo simple es independiente de su masa y depende solo de la longitud de la cuerda y de la gravedad.

6.5. Composición de resortes – Resorte equivalente

Cuando dos o más resortes se conectan en paralelo o en serie, se puede sustituir por un sólo resorte equivalente. La obtención de éste resorte equivalente se llama composición de resortes. Sean los siguientes casos:

a) Sistema en paralelo con un grado de libertad.

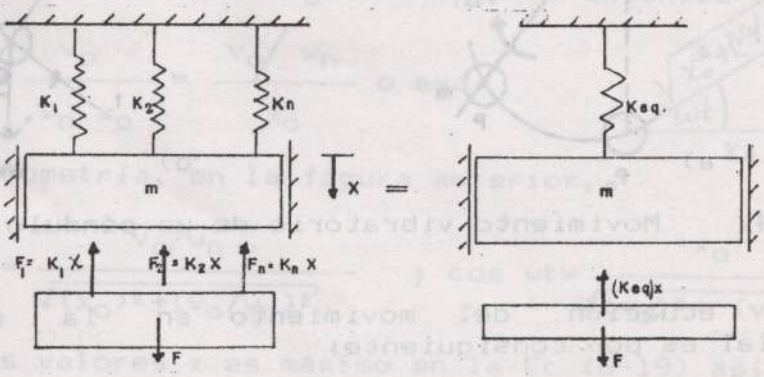


Fig. 6.5. Sistemas de resortes acoplados en paralelo y su equivalente

Sean n resortes acoplados en paralelo . Fig. 6.5, con sus extremos situados sobre una misma recta horizontal.

La fuerza $\bar{F}$ se encuentra repartida en los n resortes así: $F = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots\ldots + F_n$, entonces el alargamiento x es el mismo para todos los resortes, ya que la barra es indeformable y permanece horizontal. De ésta forma:

$$F = k_1x + k_2x + \ldots\ldots\ldots + k_nx = x(k_1 + k_2 + \ldots\ldots k_n) \quad \text{o sea} \quad F = x\,k_{eq}, \text{ entonces}$$

$$k_{eq} = (k_1 + k_2 + \ldots\ldots\ldots + k_n) = \sum_{i=1}^{n} k_i \qquad (6\text{-}26)$$

b) Sistema en serie.

Sea encontrar la constante equivalente de n resortes acoplados en serie. Fig 6.6

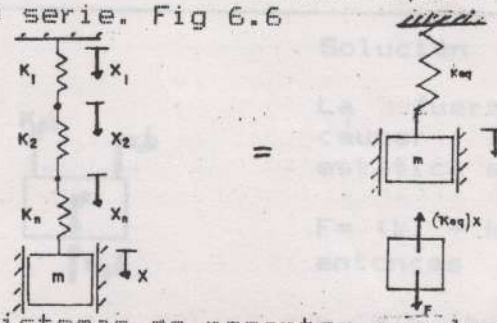


Fig 6.6 Sistemas de resortes acoplados en serie y su equivalente.

En éste caso, la fuerza es la misma en cada resorte pero el desplazamiento total es igual a la suma de los desplazamientos individuales.

Así $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = F/k_1 + F/k_2 + \ldots + F/k_n = F/k_{eq}$ entonces

$$1/k_{eq} = 1/k_1 + 1/k_2 + \ldots\ldots + 1/k_n = \sum_{i=1}^{n} 1/k_i \qquad (6\text{-}27)$$

o también:

$$k_{eq} = \frac{1}{1/k_1 + 1/k_2 + \ldots\ 1/k_n} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} (1/k_i)} \qquad (6\text{-}27')$$

c) Sistema en paralelo con disposición en sucesión

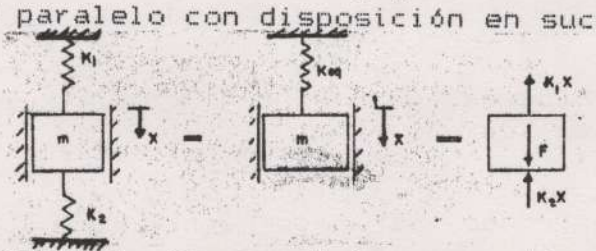


Fig 6.7 Sistemas en paralelo con disposición en sucesión y su equivalente

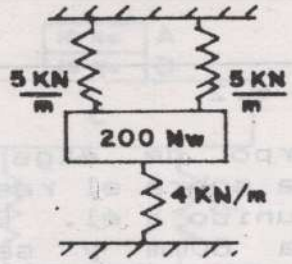
En éste caso el desplazamiento de ambos resortes es el mismo, mientras que el de arriba se alarga x, el de abajo se comprime igual cantidad. En la fig. 6.7 c; $+\uparrow\Sigma F_y = 0$ o sea que

$$F = k_1x + k_2x = x(k_1 + k_2) = xk_{eq} \text{ de donde}$$

$$k_{eq} = k_1 + k_2 \qquad (6\text{-}28)$$

En los casos anteriores se observa que en realidad lo que define si un sistema de resortes está en paralelo o en serie, no es su disposición, sino que cuando los resortes están sometidos a idéntico desplazamiento se trata de un sistema en paralelo y cuando está sometido a la misma fuerza se trata de un sistema en serie.

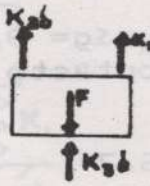
Ejemplo 6.1



Un bloque de 200 New de peso está sostenido por resortes según figura (Paralelo con disposición en sucesión). El bloque se mueve verticalmente hacia abajo desde su posición de equilibrio y se suelta.

Determine: a) periódo, frecuencia, velocidad y aceleración máxima del bloque si la amplitud del movimiento resultante es de 4 cms.

Solución



La fuerza requerida para causar una deflexión estática es:

$$F = (k_1 + k_2 + k_3)\delta = (k_{eq})\delta$$

entonces

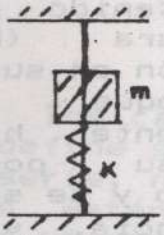
$$k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3 = (5+5+4) = 14\ KN/m$$

$$\tau = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{200}{9,8(14 \times 10^3)}} = 0,24\ seg.$$

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{0,24} = 4,17\ Hz$$

$$v_{max} = A\,w = A\sqrt{\frac{k}{m}} = 0,04\sqrt{\frac{14 \times 10^3}{200/9,8}} = 1,05\ m/seg.$$

$$a_{max} = Aw^2 = A\left(\frac{k}{m}\right) = 0,04\left(\frac{14 \times 10^3}{200/9,8}\right) = 27,44 m/seg^2$$



Ejemplo 6.2

Un cuerpo de 4kgs de masa descansa sobre el resorte sin estar unido a él. El cuerpo se baja 60mm y se suelta. Si el movimiento es armónico simple, Determínese: valor máximo permitido de k y posición del cuerpo 0,20 segundos después de soltarlo.

Solución:

Si el movimiento es M.A.S., $a_{max} \leq g = 9,8 m/seg^2$ el cuerpo debe permanecer en contacto con el resorte y $x_{max} = A = 40mm$.

$$a_{max} = x_{max} (w_n)^2 \quad \text{Ec.(6.7)} \quad \text{y}$$

$$w_n = \sqrt{\frac{g}{Xmax}} = \sqrt{\frac{9,8}{0,06}} = 12,78 \text{ rad/seg}$$

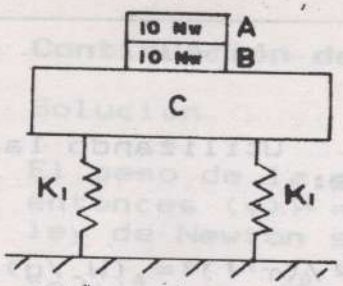
$$w^2_n = k/m \; ; \; k = mw^2_n = 4(12,78)^2 = 653,33 \text{ N/m}$$

$+ \downarrow x$ En $t = 0$; $x = x_{max} = 0,04$ y $(w_n)t = 0$; $sen(wt+\emptyset)=1$ por lo tanto $\emptyset = \pi/2$

En $t = 0,20$ seg; $w_n t = (12,78)(0,20) = 2,56 rad =$
$= 2,56 (180/\pi)$
$w_n t = 146,68°$

Así: $(w_n t + \emptyset) = 146,38 + 90 = 236,68°$ Por lo tanto
$x = x_{max} \, sen(w_n + \emptyset) = 60mm \, sen 236,68 = -50,14mm$

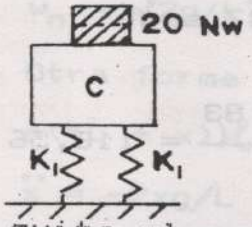
$x = 50,14mm$ arriba de la posición de equilibrio



Ejemplo 6.3

En el sistema mostrado su período de vibración es 0,9 segundos. Si se retira el cuerpo A, el período es de 0,8 segundos. Determine:
a) el peso del cuerpo C
b) el período de vibración y el valor de k, cuando ambos cuerpos A y B se quitan.

Solución:

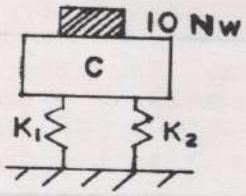


Cuerpos A y B colocados sobre el el cuerpo C.

$k_{eq} = 2k_1$ y $w^2_n = k_{eq}/m_T = (2\pi)^2/\tau^2$ por lo tanto

$$k_{eq} = \frac{4\pi^2 (W_c + 20)}{(\tau)^2 \cdot g} \quad (1)$$

Se quita el cuerpo A y queda $w^2_n = \frac{k_{eq}}{(m^2_T)^2} = \frac{(2\pi)^2}{(\tau')^2}$



$$Keq = \frac{4\pi^2 (W_c + 10)}{(\tau')^2 \cdot g} \quad (2)$$

Igualando (1) y (2) se tiene:

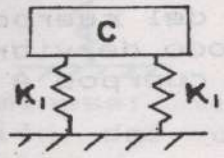
$$\frac{4\pi^2 (W_c + 20)}{(\tau)^2 \cdot g} = \frac{4\pi^2 (W_c + 10)}{(\tau')^2 . g}$$ quedando

$$\frac{(\tau')^2}{(\tau)^2} = \frac{(Wc + 10)}{(Wc + 20)} \; ; \; \frac{(0,8)^2}{(0,9)^2} = \frac{(W_c + 10)}{W_c + 20} \; ;$$

Wc= 27,62 New

Continuación del ejemplo 6.3

Se quitan los cuerpos A y B - Utilizando la (1) se tiene:



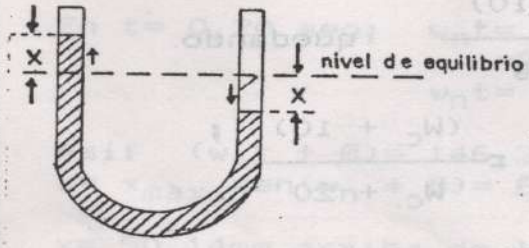
$$k_{eq} = 4\pi^2/(\tau'')^2 = (W_c/g)$$

e igualando con (2), entonces

$$(\tau'')^2 = \frac{W_c(\tau')^2}{(W_c+10)} = \frac{27,62\ (0,8)^2}{(27,62+10)} = 0,47\ seg^2$$

$$(\tau'') = 0,68\ seg\ ; \qquad k_1 = \frac{k_{eq}}{2} = \frac{236,83}{2} = 118,56\ N/m$$

Ejemplo 6.4



Un tubo de sección transversal uniforme A, contiene una columna líquida de peso específico γ y longitud total L. Suponiendo que cuando se altera la posición de equilibrio la columna líquida oscila con un movimiento armónico simple; encuentre la ecuación del movimiento y el período de oscilación.

Continuación del ejemplo 6.4

Solución

El peso de la columna líquida de altura 2x es (v) entonces $(v)\mathcal{H} = (2x.A)\mathcal{H}$ y estableciendo la segunda ley de Newton se tiene:

$-2xA\mathcal{H} = (AL)(\mathcal{H}/g)\ddot{x}$, ya que $\mathcal{H} = \rho g$

y la ecuación del movimiento será:

$$\ddot{x} + (2g/L)x = 0$$

$$w_n = \sqrt{2g/L} \quad y \quad \tau = 2\pi/w_n = 2\pi\sqrt{L/2g}$$

Otra forma sería:

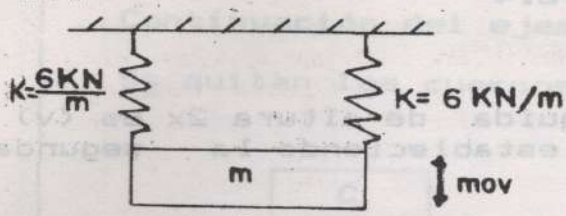
$A(\frac{1}{2}L + x)\mathcal{H} - A(\frac{1}{2}L - x)\mathcal{H} = -(\mathcal{H}/g)(AL)\ddot{x}$ o sea

$$\ddot{x} = -2xg/L$$

$$\ddot{x} + (2g/L)x = 0;\ w_n = \sqrt{2g/L};\ \tau = 2\pi/w_n = 2\pi\sqrt{L/2g}$$

Problemas/secs. (6.1; 6.2; 6.3; 6.4; 6.5)

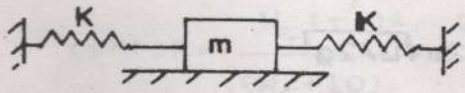
6.1



Una barra uniforme de 20 Kgs de masa está sostenida por dos resortes iguales de constante k=6 KN/m. Encuentre la frecuencia circular natural de la barra en su movimiento vertical.

R: w_n= 24,49 rad/seg.

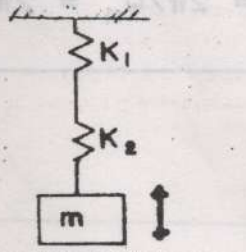
6.2



Un bloque de 3 Kgs de masa se desliza sobre una superficie horizontal sin fricción. La constante de los dos resortes es k = 90N/m y están unidos al bloque al que no se le aplica ninguna fuerza en la posición de equilibrio. Determine la frecuencia circular del bloque.

R: w_n = 7,75 rad/seg

6.3



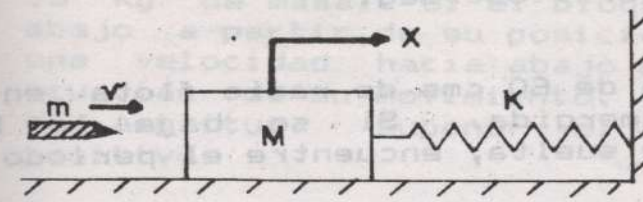
Encuentre la ecuación de la frecuencia circular natural del movimiento de la masa de un cuerpo suspendido de dos resortes colocados en serie.

R: $w_n = \sqrt{\dfrac{k_1 \cdot k_2}{m(k_1 + k_2)}}$

6.4 Si en el problema 6.3, el peso del cuerpo que cuelga es de 500N y tiene una velocidad de 100 cm/seg cuando pasa por su posición de equilibrio, siendo k_1 = 60 New/cms y k_2 =40 New/cms. Calcule la máxima tensión en los resortes. ¿Cuánto cambiará esta tensión al suprimir el resorte inferior?.

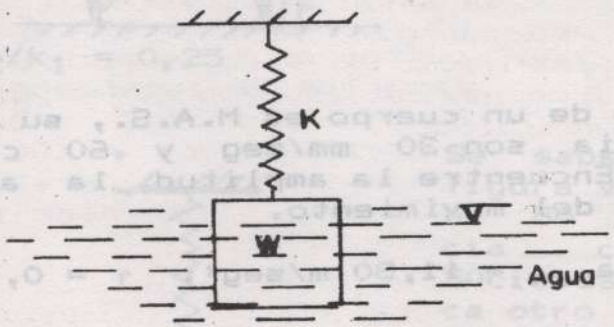
R: T_{max} = 849,93; Aumento de tensión = 300,73 New.

6.5. Una bala de masa m cuya velocidad es v penetra y no atraviesa el bloque de masa M que está en reposo sobre una superficie lisa. Determine la ecuación del movimiento de M, o sea x = f(t). Sugerencia (Utilice el principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal)



R: $x = \frac{mv}{\sqrt{k(m+M)}} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{(m+M)}} \cdot t$

6.6



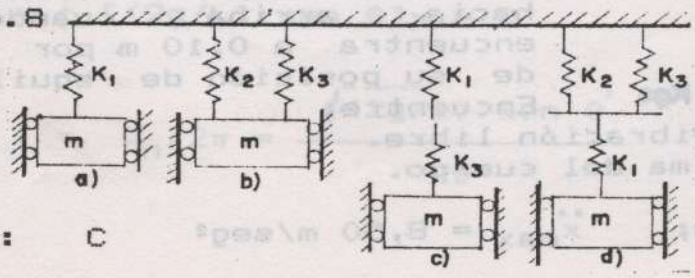
Un bloque sólido homogéneo de peso W y área de sección transversal A, se encuentra sumergido en agua de peso específico γ. Determine el período del movimiento si el bloque es desplazado ligeramente de su posición de equilibrio. Desprecie la fricción.

R: $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{W}{g(k + A\gamma)}}$

6.7 Un sistema simple sin amortiguamiento de masa y resorte tiene una constante k = 5π new/cms, una masa=(5/π)Kgs y se observa que tiene un desplazamiento de 5 cms de la posición de equilibrio cuando t = 1 seg y una velocidad de 6,3 cms/seg en t = 2 seg. Encuentre el desplazamiento como una función del tiempo.

R: $x = 2 \operatorname{sen}(\pi t) - 5 \cos(\pi t)$

6.8



Cuál de los sistemas que se muestran tiene el período más largo si k_1 = 5 New/cms; k_2 = 8 New/cms; k_3 =10 New/cms.

R: C

6.9 Un movimiento armónico simple se define por la relación $a = -36x$. Determine su período y su frecuencia.

R: $\tau = (\pi/3)$ seg; $f = (3/\pi)$ osc/seg.

6.10 Una bola esférica de 60 cms de radio flota en el agua con la mitad sumergida. Si se baja la bola ligeramente y después de suelta, encuentre el período de oscilación.

R: $\tau = 1,27$ seg.

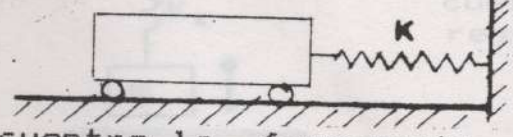
6.11 El movimiento de dos cuerpos es armónico simple y sus velocidades máximas son iguales, pero sus frecuencias naturales están en la relación de 1 a 5. Calcule la razón entre sus amplitudes.

R: $A_1/A_2 = 5$.

6.12 El movimiento de un cuerpo es M.A.S., su velocidad máxima y frecuencia son 30 mm/seg y 60 ciclos/seg, respectivamente. Encuentre la amplitud, la aceleración máxima y el período del movimiento.

R: $A = 0,0796$ mm; $a_{max} = 11,30$ m/seg^2; $\tau = 0,017$ seg.

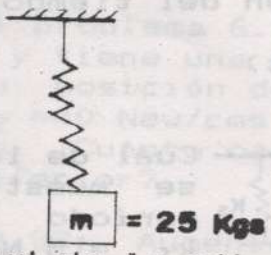
6.13



Un cuerpo de 5 Kg de masa se desplaza 0,20 m hacia la derecha de su posición de equilibrio y se suelta desde el reposo en t = 0. Si k = 50 N/m. Encuentre la frecuencia de la vibración resultante y su ecuación diferencial.

R: $f = 0,50$ ciclos/seg; $x(t) = 0,20 \cos(3,16t)$.

6.14



Un cuerpo de 25 Kg de masa, está sostenido por un resorte de k = 1.600 N/m. La velocidad del cuerpo es de 0,70 m/seg hacia arriba cuando se encuentra a 0,10 m por debajo de su posición de equilibrio. Encuentre:

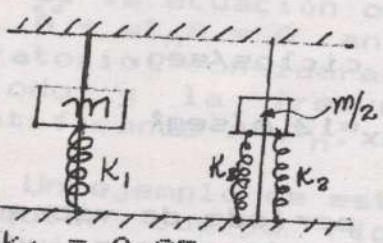
a) Amplitud de la vibración libre.
b) Aceleración máxima del cuerpo.

R: a) $A = 132,88$ mm; $\ddot{x}_{max} = 8,50$ m/seg^2

6.15 Un resorte se alarga 200 mm mediante un bloque de 15 Kg de masa. Si el bloque se desplaza 100 mm hacia abajo a partir de su posición de equilibrio y se le dá una velocidad hacia abajo de 0,75 m/seg, determine la ecuación de su movimiento. Cuál es su ángulo de fase y su amplitud. Suponer el desplazamiento hacia abajo positivo.

R: $x(t) = 0,107 \text{ sen } (7t) + 0,100 \cos (7t)$; $\phi = 43,06°$

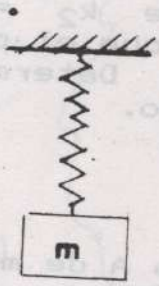
6.16



Consiga la razón k_2/k_1, necesaria para que los dos sistemas de la figura tengan la misma frecuencia natural circular.

R: $k_2/k_1 = 0,25$

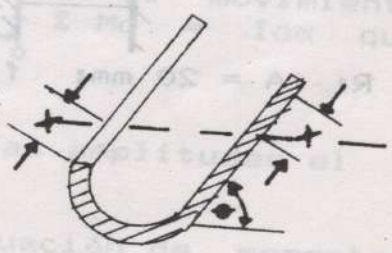
6.17



Se sabe que el bloque de la figura vibra libremente a razón de 80 ciclos/seg. La frecuencia circular baja hasta 50ciclos/seg cuando se le coloca otro bloque de 6Kgs de masa. Encuentre la masa del bloque original y la rigidez del resorte.

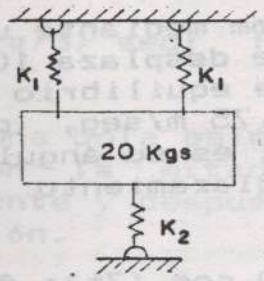
R: $m = 3,85$ Kgs; $k = 972,75$ KN/m

6.18 Cuando el tubo en "U" del ejemplo 4 se inclina formando un ángulo θ con la horizontal como en la figura, encuentre la ecuación del movimiento y la frecuencia natural para pequeñas oscilaciones.



R: $\ddot{x} + [(2g/L) \text{ sen } \theta]x = 0$

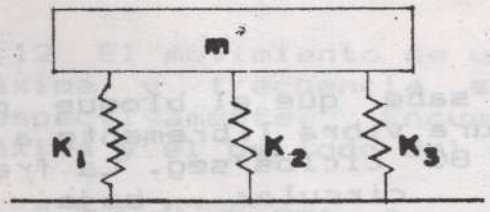
$$f = w_n/2\pi = \frac{\sqrt{(2g/L).\text{sen } \theta}}{2\pi}$$

6.19 

Un bloque de 20 Kg de masa está sostenido por el sistema de resortes mostrado. Si el bloque se mueve verticalmente hacia abajo desde su posición de equilibrio y se suelta. Determine: a) Período y frecuencia del movimiento; b) Velocidad máxima y aceleración del bloque cuando la amplitud del movimiento es de 30 mm. k_1 = 3 KN/m; k_2 = 2 KN/m;

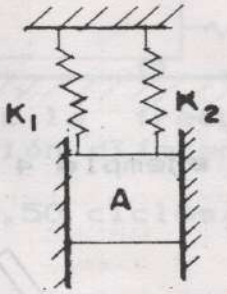
R: a) τ = 0,31 seg; f = 3,18 ciclos/seg.

b) v_{max} = 0,6 m/seg; a_{max}=12 m/seg²

6.20 

El período de vibración de un cuerpo de masa m, unido a tres resortes de constantes k_1, k_2 y k_3 es de 1 seg. Después de suprimirse k_2 = 100 N/m. se observa que el período es de 1,20 seg. Determine la masa m del cuerpo.

R: m = 3,23 Kgs.

6.21 

El cuerpo A de masa 10 Kgs está suspendido de dos resortes, como se indica en la figura, con k_1 = 1 KN/m y k_2 = 3 KN/m. Calcule la amplitud y la frecuencia de la vibración de A, si su rapidez cuando pasa por su posición de equilibrio es de 0,4 m/seg.

R: A = 20 mm; f = 3,18 ciclos/seg o Hz.

6.6 Vibraciones libres de cuerpos rígidos

Los conceptos sobre vibraciones de una partícula desarrollados antes se aplican en forma semejante a cuerpos rígidos con un solo grado de libertad, que se trasladan sin girar. Si un cuerpo está soportado en tal forma que gira mientras vibra, el período y por tanto la frecuencia de su movimiento dependen del momento de inercia de su masa, propiamente dicha y de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

Si la ecuación obtenida es de la forma $\ddot{\theta} + w^2_n\theta = 0$ análoga a $\ddot{x} + w^2x = 0$ el movimiento vibratorio considerado es angular armónico simple. El período y la frecuencia se obtienen de la ecuación identificando a w^2_n.

Un ejemplo de este caso es el péndulo compuesto. Es cualquier cuerpo rígido que puede oscilar libremente alrededor de un eje horizontal fijo que pasa por un punto del cuerpo, bajo la acción de la gravedad. Fig 6.8a.

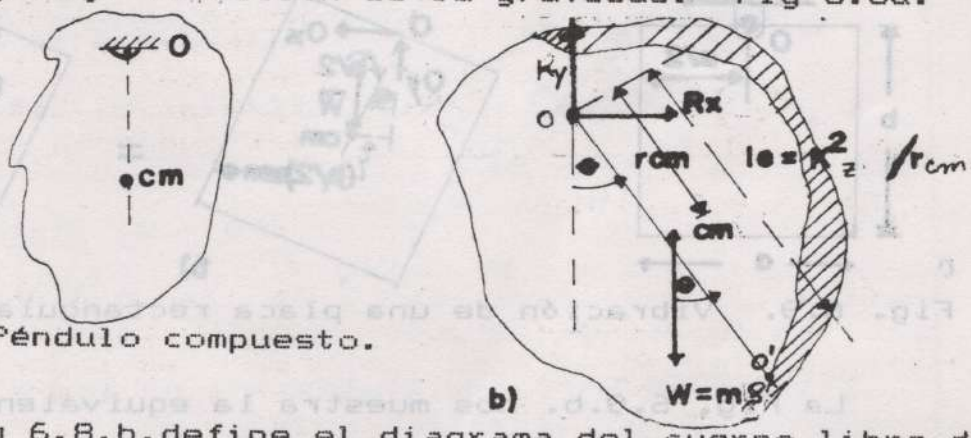


Fig 6-8. Péndulo compuesto.

La Fig 6.8.b.define el diagrama del cuerpo libre del péndulo cuando se encuentra desplazado un ángulo θ positivo respecto a la posición de equilibrio.

La ecuación escalar que describe el movimiento en términos de los momentos es $(+\Sigma M_O = I_O\alpha$ que se convierte en $- mgr_{cm} \operatorname{sen}\theta = (I_O)\ddot{\theta}$ ó

$$\ddot{\theta} = - \frac{mg(r_{cm})\operatorname{sen}\theta}{I_O}$$ para pequeñas amplitudes el valor

de $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ en radianes y la ecuación de momentos se convierte en

$$\ddot{\theta} + \frac{mgr_{cm}}{I_O}\theta = 0 \quad \text{ó} \quad \ddot{\theta} + \frac{gr_{cm}}{k^2_z}\theta = 0 \qquad (6\text{-}29)$$

siendo $I_o = mk^2$ y k = Radio de giro. La Ec. (6-29) es similar a la del M.A.S., donde $w^2_n = gr_{cm}/k^2_z$. El período de la vibración es:

$$\tau = 2\pi/w_n = 2\pi\sqrt{\frac{k^2_z}{gr_{cm}}} \qquad (6\text{-}30)$$

Se observa que el período de un péndulo compuesto es el mismo que para un péndulo simple que tiene una longitud equivalente $l_{eq} = k^2_z/r_{cm} = I_o/mr_{cm}$. Se nota que el período del péndulo compuesto es independiente de su masa y de su forma geométrica, siempre que el radio de giro k_z y la posición de Cm, dado por r_{cm} permanezcan inalterables.

Otro ejemplo sería determinar el período para pequeñas oscilaciones de una placa rectangular de lados a y b, masa m y suspendida del punto medio O del lado a. Fig. 6.9.a.

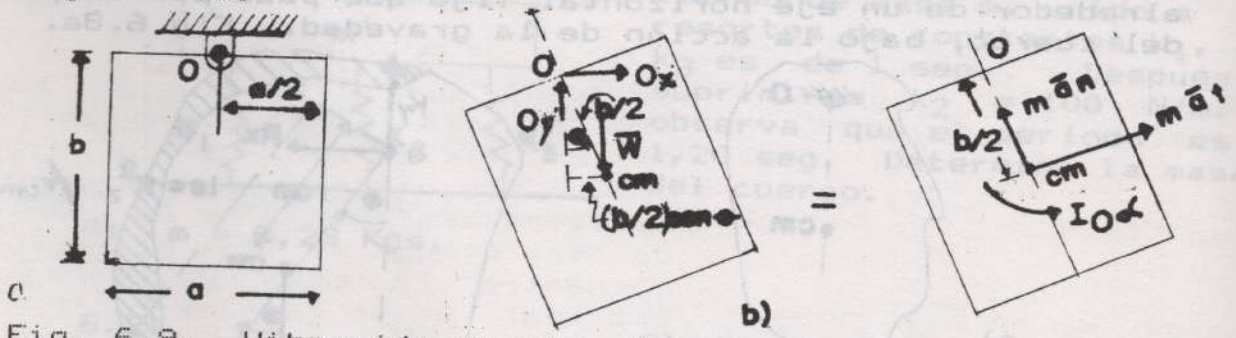


Fig. 6.9. Vibración de una placa rectangular.

La Fig. 6.9.b. nos muestra la equivalencia entre las fuerzas W, O_y y O_x con los vectores $m(\bar{a})_t$, $m(\bar{a})_n$ y el par $I_o\alpha$

Igualando los momentos respecto a O, se tiene

$$\circlearrowleft + \Sigma M_o = m\left(\frac{b}{2}\ddot{\theta}\right)\left(\frac{b}{2}\right) + I_o\cdot\ddot{\theta}, \acute{o} \; - mg(b/2 \text{ sen } \theta)$$

$$= \ddot{\theta}\left[\frac{1}{12} m(a^2 + b^2) + m(b/2)^2\right]$$

como sen $\theta \approx \theta$, entonces $-\frac{bg}{2}\theta = \left(\frac{1}{12}a^2 + \frac{1}{3}b^2\right)\cdot\ddot{\theta}$

así

$$\ddot{\theta} + \left[\frac{bg}{2[1/12(a^2) + 1/3b^2]}\right]\theta = 0 \quad y \quad w_n = \sqrt{\frac{bg}{2(a^2/12 + b^2/3)}}$$

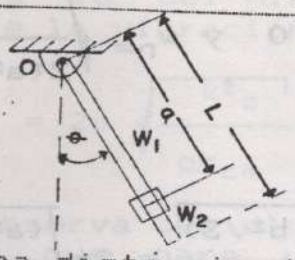
y por lo tanto el período

$$\tau = 2\pi/w_n = 2\pi\sqrt{\frac{2(a^2/12 + b^2/3)}{bg}} = 2\pi\sqrt{\frac{(a^2 + 4b^2)}{6bg}} \qquad (6\text{-}31)$$

si la placa es cuadrada a = b y el período

$$\tau = 2\pi\sqrt{5b/6g}$$

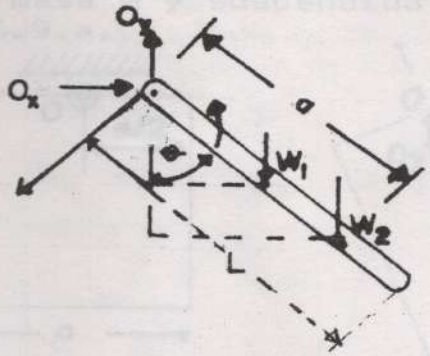
y $l_e = 5b/6$ que nos dá la posición del centro de oscilación.



Ejemplo 6.5

Una barra uniforme de peso W_1= 30 New y longitud 1,20m está articulada en el punto O. Un bloque de peso W_2= 50New está unido a la barra a una distancia de O de 1m. Determine la amplitud angular del péndulo si la velocidad máxima de W_2 es de 30 cms/seg

Solución



W_1= 30 New; W_2= 50 New
v_{2max}=30 cm/seg ; L= 1,20 m
a= 1,0 m
con la Ec. $\curvearrowleft \Sigma Mo = Io\,\ddot{\theta}$ se tiene

$$-W_1(L/2 \cdot \operatorname{sen}\theta) - W_2(a.\operatorname{sen}\theta) = \left\{\left[1/12\ (W_1/g)\ L^2 + (W_1/g)\ (L/2)^2\right] + \left[0 + (W_2/g)\ (a^2)\right]\right\}\ddot{\theta}$$

Utilizando para Io, el teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia de masas ; $I = I + md^2$
Para pequeñas amplitudes $\operatorname{sen}\theta = \theta$; asi que

$$-[30(1,2/2) + 50x1]\,\theta = \{[1/12 \times 30/9,8\ (1,2)^2 + 30/9,8\ (1,2/2)^2 + (50/9,8) \cdot (1)^2]\}\ddot{\theta} = 6,57.\ddot{\theta} + 68\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + 10,35\ \theta = 0$$

Continuación del ejemplo 6.5

De esta forma

$$w^2_n = 10,35; \quad w_n = 3,22 \text{ rad/seg}$$

$(v_2)_{max} = r.\dot{\theta}_{max}$; velocidad transversal

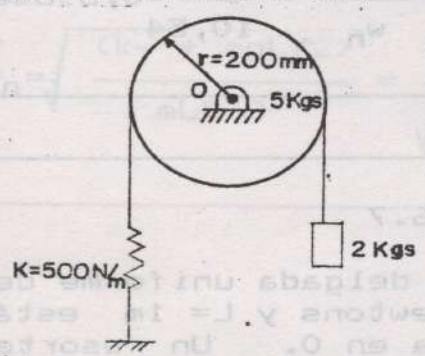
$$\theta_{max} = v_{2max}/a = 0,30 = 0,30 \text{ rad/seg}$$

pero $\theta = \theta_{max} \cdot Sen(w_n t + \emptyset)$ derivando, se tiene

$\dot{\theta} = \theta_{max} \cdot w_n Cos(w_n t + \emptyset)$, y para $\dot{\theta}_{max}$, entonces

$Cos(w_n t + \emptyset) = 1$ y $0,30 = \theta_{max} w_n = \theta_{max}$ (3,22)

así $\theta_{max} = 0,30/3,22 = 0,099$ radianes



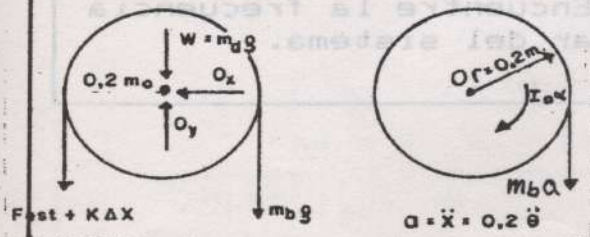
Ejemplo 6.6

Un disco, que tiene una masa de 5 Kgs, está articulado en O y soporta al bloque de masa 2 Kgs. Si a la banda que pasa sobre el disco, no se le permite deslizar en su superficie de contacto, encuentre el período de vibración del sistema.

Solución:

$m_d = 5$ Kgs; $m_b = 2$ Kgs.

$r = 0,2$ m; $k = 500$ N/n



La pequeña longitud que se desplaza el disco en su rotación($r\theta$) es igual a la longitud que se traslada el bloque al bajar o sea $x = 0,2\theta$ para ángulos pequeños de θ.

Cuando el cuerpo está en reposo o sea $\theta = 0°$, la $F_{est} = m_b g = 2 . \ 9,8 = 19,6$.

Continuación del ejemplo 6.6

Para θ diferente de 0°, la fuerza del resorte es $F_{est} + k\Delta x$ o sea $F_{est} + k\Delta x = 19,6 + 500\ (0,2 * \theta)$

$$= 19,6 + (100)\cdot\theta$$

Tomando momentos respecto al punto O se tiene:

$$\left\{ \Sigma(Mo)_{est} = \Sigma(Mo)_{din} \quad ; \quad \Sigma Mo = I.\alpha \right.$$

$$-[19,6 + 100\theta]\ 0,2 + 2x\ 9,8(0,2) = (I)_o\ \ddot{\theta} + 2a\ (0,2)$$

$$= (I)_o\ \ddot{\theta} + 0,4\ (0,2\ddot{\theta})$$

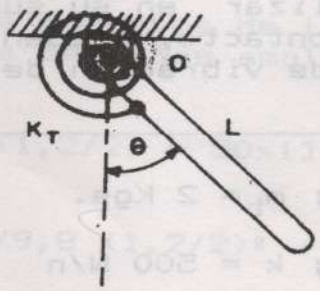
Pero $I_o = \frac{1}{2}(m_d)r^2 = \frac{1}{4}.5\cdot(0,2)^2 = 0,1$[disco circular]

$$-20\theta = 0,18\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + (20/0,18)\ \theta = 0$$

$$w_n = \sqrt{\frac{20}{0,18}} = 10,54 \cdot \frac{rad}{seg.} \quad \text{así} \quad \tau = \frac{2\pi}{w_n} = \frac{2\pi}{10,54} = 0,596 seg$$

Ejemplo 6.7

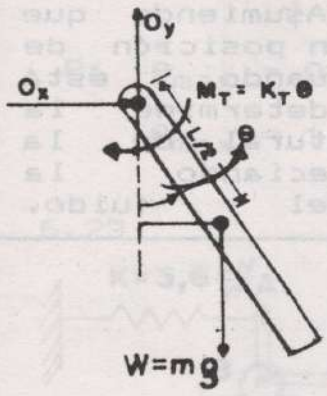


Una barra delgada uniforme de peso 50 Newtons y L= 1m está articulada en O. Un resorte torsional de constante k_T = 800 N x m/rad une a la barra con el punto O. Cuando $\theta = 0°$ el momento torsional M_T= 0. Encuentre la frecuencia circular del sistema.

Continuación del ejemplo 6.7

Solución:

L= 1m; W=50New; k_T= 800 $\frac{N \times m}{rad}$



Ecuación general:

$(+\circlearrowleft) \Sigma M_O = I_O \ddot{\theta}$ (1)

entonces

$$-k_T\theta - mg(L/2)\,Sen\theta = [(1/12)mL^2 + m(L/2)^2]\ddot{\theta} - (1/3)mL^2\ddot{\theta}$$

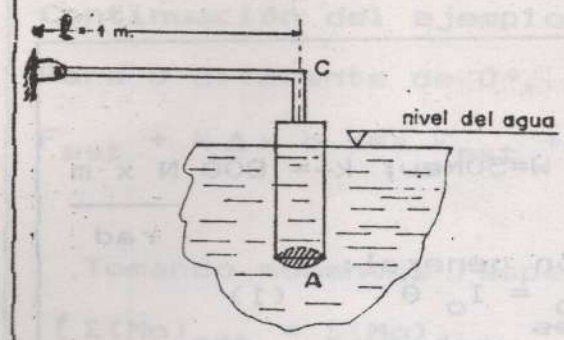
para θ pequeños; Senθ ≈ 0, por lo tanto

$$-k_T\theta - m(L/2)\,\theta = (1/3)m\,L^2\ddot{\theta}$$ así:

$$\ddot{\theta} + \frac{(k_T + mgL/2)}{(mL^2/3)}\theta = 0$$

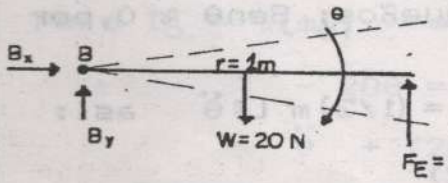
$$w_n = \sqrt{\frac{(k_T + mgL/2)}{mL^2/3}} = \sqrt{\frac{800 + 50(½)}{\frac{50}{9,8}\frac{(1)^2}{3}}} = 22,03\ rad/seg$$

Ejemplo 6.8



La barra delgada B.C. tiene 1 metro de longitud y pesa 20 Newtons. El extremo derecho de la barra reposa sobre un pequeño flotante, que tiene una sección transversal de área 100 cms² y peso despreciable. Asumiendo que la barra está en posición de equilibrio cuando está horizontal, determine la frecuencia natural de la barra despreciando la fricción del fuido.

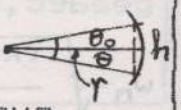
Solución:



$\rho = 10^3$ Kgs/m^3

$\gamma = g\rho = 9{,}8 \cdot 10^3$ N/m^3 $= 9.800$ N/m^3

pero $P = \rho gh = \gamma h$; siendo $\gamma = \rho g$: aquí
ρ = Densidad; γ = Peso específico $h = s = r\theta$



De esta forma $h = r(\theta_o + \theta) = 1(\theta_o + \theta)$; asi que

$F_E = \gamma h.A = \gamma \times 1\ (\theta_o + \theta)A.$ (1)

En equilibrio: $\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0 = 20\ (½) - 1 \cdot \theta_o . \gamma A$ (1)

Pero $\circlearrowleft + \Sigma M_B = I_B \ddot{\theta}$ o sea

$20\ (½) - \gamma \cdot 1(\theta_o + \theta)A.$ (1) $= 1/3\ ml^2 . \ddot{\theta}$ (2)

ya que. I de una barra delgada uniforme, en el extremo es:

$I_B = (1/3)ml^2$.

Resplazando (1) en (2) se tiene:

$-\gamma . \theta . A = (1/3)\ (20)/(9{,}8)\ (1)^2 . \ddot{\theta}$ o sea

$$\ddot{\theta} + \frac{3 \cdot 9{,}8}{20} (\gamma . A) . \theta = 0$$

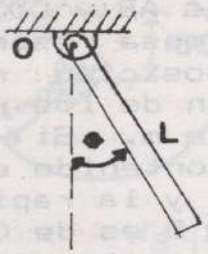
$$Wn = \sqrt{1{,}47\,\gamma A}$$

Reemplazando valores.

$w_n = \sqrt{1{,}47 \cdot 9{,}800\ (0{,}01)} = 12$ Rad/seg.

Problemas/Sec (6.6)

6.22

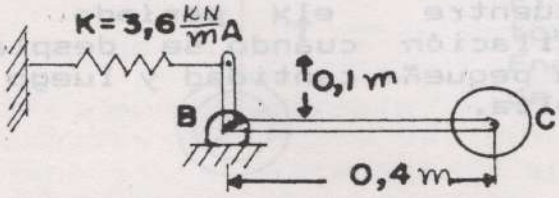


Una barra delgada de 4 Kgs. de masa y 1 m. de longitud rota alrededor de O. Determine la velocidad y aceleración angular máxima ($\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$) si la amplitud angular es $\theta = 0,1$ radianes (Pequeñas oscilaciones).

R: $\dot{\theta}_{max} = 0,38$ rad/seg;

$\ddot{\theta}_{max} = 1,47$ rad/seg^2.

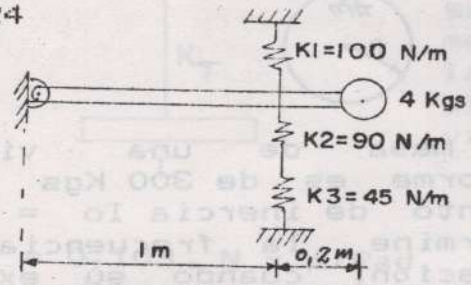
6.23



El cuerpo rígido ABC de masa despreciable, soporta al cuerpo C de masa 4 Kgs. La barra BC está horizontal cuando el sistema se encuentra en equilibrio. Encuentre el período de vibración producido al desplazar ligeramente a C de su posición de equilibrio y luego soltarlo.

R: $\tau = 0,84$ seg.

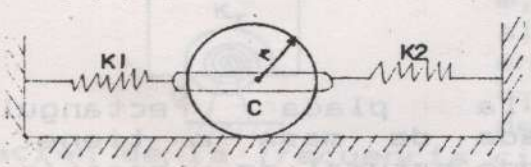
6.24



Si en la figura, la masa de la barra es despreciable resuelva la ecuación diferencial que describe el movimiento del sistema, si las condiciones iniciales en t = 0 son: $\theta = 0,1$ radián y $\dot{\theta} = 0,6$ radianes/seg.

R: $\theta = 0,126 \text{ Sen } (4,75t) + 0,1 \text{ Cos } (4,75t)$

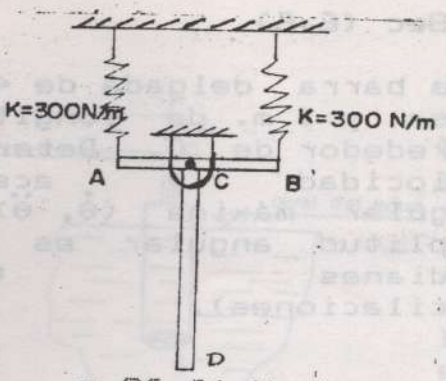
6.25



Una esfera maciza y homogénea de 10 Kgs de masa, gira sin deslizar cuando se desplaza a partir de su posición de equilibrio. La tensión inicial de cada resorte es 200 Newton. Inicialmente se desplaza el centro de la esfera 80 mm hacía la derecha y luego se suelta a partir del reposo. Encuentre la frecuencia del movimiento y la rapidez máxima del centro de la esfera.

R: $f = 1,995$ ciclos/seg ; $(v_{max})_C = 1$ m/seg.

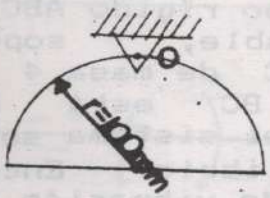
6.26



Las barras AB y CD tienen 2 y 4 Kgs de masa respectivamente. En la posición mostrada la elongación de los resortes es de 100 m.m. Si el sistema oscila contenido en el plano vertical y la rapidez máxima del punto D es de 0,50 m/seg. Encuentre la tensión máxima en los resortes.

R: T_{max} = 36,21 Newtons.

6.27



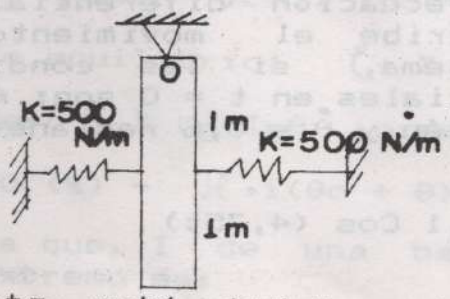
La masa de un disco semicircular es de 4 Kgs. Encuentre el período de oscilación cuando se desplaza una pequeña cantidad y luego se suelta.

R: τ = 0,674 seg.

6.28 Un aro delgado está soportado por el filo de una navaja. Determine el período de oscilación para amplitudes pequeñas.

R: $\tau = 2\pi\sqrt{2r/g}$

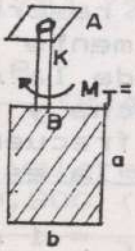
6.29



La masa de una vigueta uniforme es de 300 Kgs y su momento de inercia Io = 250. Determine la frecuencia de vibración, cuando su extremo inferior se desplaza una cantidad pequeña y luego se suelta a partir del reposo. El resorte está indeformado cuando la vigueta se encuentra vertical.

R: f = 0,632 ciclos/seg.

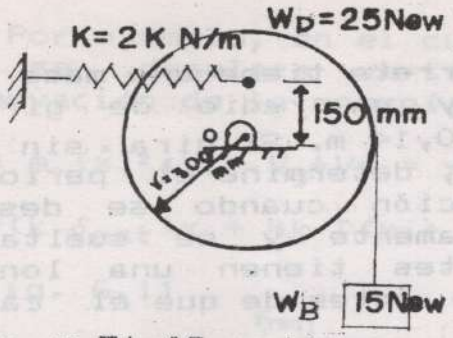
6.30



Si la placa rectangular delgada de masa m tiene un período natural de vibración τ, cuando oscila alrededor del eje de la barra. Determine la rígidez torsional k. de la barra AB.

R: $K = \dfrac{m a^2}{12 \tau^2}$

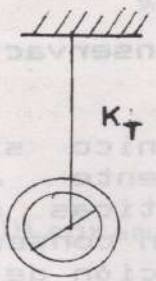
6.31



En el sistema que se encuentra en su posición de equilibrio estático, determine su frecuencia circular natural.

R: w_n = 51,08 rad/seg.

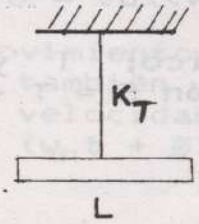
6.32



Una rueda está suspendida por un alambre de rígidez torsional k_t = 0,5 New x m/rad. El período de vibración torsional es de 10 seg: Encuentre el momento de inercia de la rueda.

R: I_o = 3,98 New . m . seg².

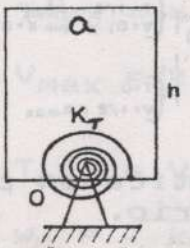
6.33



Una barra delgada de 2 Kgs de masa 50 cms de longitud está suspendida por el centro mediante un alambre. Determine la rígidez torsional k_T, del alambre si su período de vibración es de 4 seg.

R: k_T = 0,103 . N x m/Rad.

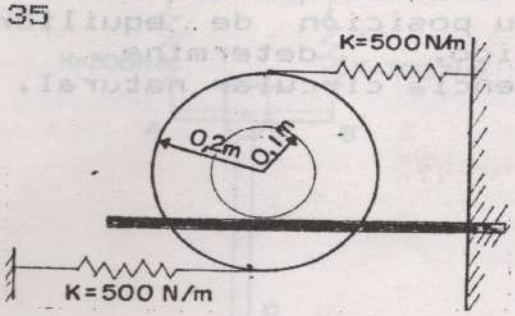
6.34



Un edificio moderno de varios pisos está modelado como una placa rígida uniforme de masa m, sección transversal a x a y altura h. Si está articulado en O con una rígidez torsional k_T que restringe el movimiento del edificio. Encuentre la ecuación de la frecuencia circular del sistema.

R: $w_n = 2{,}45 . \left(\frac{\sqrt{2k_T + wh}}{\sqrt{4h^2 + a^2}} \right)$

6.35



El carrete tiene una masa de 5 Kgs y un radio de giro de ko = 0,14 m. Si gira sin deslizar, determine el periodo de vibración cuando se desplaza ligeramente y se suelta. Los resortes tienen una longitud libre antes de que el carrete gire.

R: τ = 0,342 seg.

6.7. Aplicación del principio de conservación de la energía

Al analizar el movimiento armónico simple, se observa que éste se debe solamente a fuerzas gravitacionales y restauradoras elásticas que actuan sobre el cuerpo. Como estas fuerzas son conservativas se puede utilizar el principio de conservación de la energía para obtener la frecuencia natural y el periódo de vibración de un cuerpo. Esto significa que la energía mecánica total del sistema es constante o sea que,

$$E = T + V = cte. \quad o \quad d(T + V)/dt = 0$$

Si se tiene un movimiento armónico; T y V son valores máximos, Fig. 6.10 y la ecuación E = T + V puede escribirse en la forma

$$T_{max} = V_{max} \qquad (6\text{-}32)$$

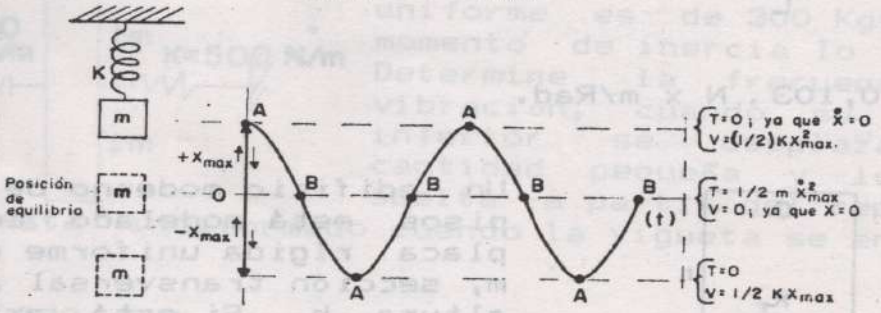


Fig 6-10- Energía potencial y cinética en puntos de desplazamientos máximo y de equilibrio.

Observamos que cuando la energía potencial del sistema es un máximo la energía cinética es cero y recíprocamente, cuando la energía cinética es máxima la energía potencial es cero - La Ec. (6-32), nos conduce directamente a encontrar la frecuencia natural del

sistema y en ella se basa el Método de Rayleigh.

Por ejemplo, en el cuerpo de masa m de la Fig. 6.3 que se desplaza verticalmente, si se le aplica conservación de la energía se tiene:

$T = \frac{1}{2} m (\dot{x})^2$; $V = V_g + V_e = -Wx + \frac{1}{2}k [(x_2)^2 - (x_1)^2]$ o sea que

$V = -(k \delta_{est})x + \frac{1}{2}k [(x + \delta_{est})^2 - (\delta_{est})^2] = \frac{1}{2} k(x)^2$.

Ver Fig. 6.11

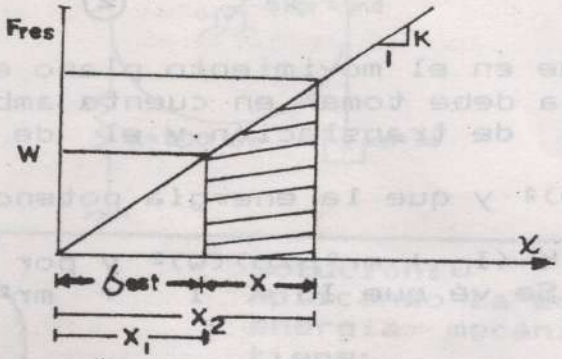


Fig. 6.11 Diagrama de F contra x del resorte vertical.

De esta forma la energía mecánica total es $\frac{1}{2} \cdot m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2} k(x)^2 =$ constante. Derivando con respecto al tiempo y sabiendo que $\dot{x}$ generalmente es diferente de cero, se tiene que $m\ddot{x} + kx = 0$, o sea que $(w_n)^2 = k/m$ igual que la Ec. (6-13).

El movimiento de la masa m de la Fig. 6.3, se puede escribir también en función del desplazamiento máximo x_{max} y la velocidad máxima $\dot{x}_{max}$. De la Ec (6-15); $x = A \text{ Sen } (w_n t + \emptyset)$

entonces

$$x_{max} = A$$
$$\dot{x} = A \cdot w_n \cdot \cos (w_n t + \emptyset)$$
$$\dot{x}_{max} = A w_n$$

De aquí que:

$$T_{max} = \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 max = (\frac{1}{2}) m . A^2 . (w_n)^2 \qquad (6\text{-}33)$$

$$V_{max} = (\frac{1}{2}) \cdot kx^2 max = \frac{1}{2} kA^2 \qquad (6\text{-}34)$$

como

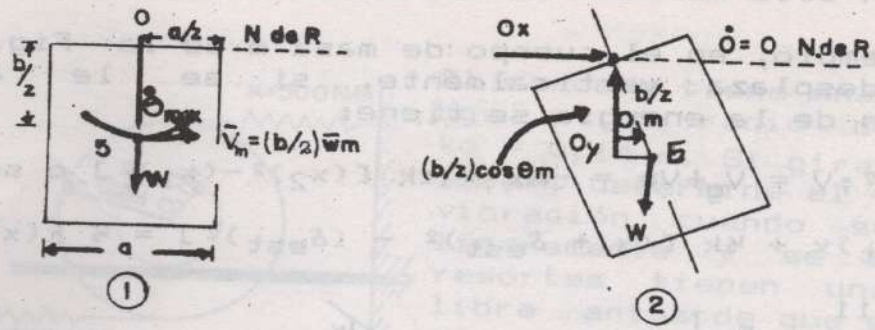
$$T_{max} = V_{max}, \text{ entonces } (\frac{1}{2}) mA^2 . (w_n)^2 = (\frac{1}{2}) kA^2$$

y $$w_n = \sqrt{k/m}$$

igual que la Ec. (6-13).

Al resolver el problema de la placa rectangular de lados a y b de la Fig. 6.9 por métodos energéticos, se

tiene:



Recuerde que en el movimiento plano en general, la energía cinética debe tomar en cuenta ambos movimientos del cuerpo, el de translación y el de rotación, así $T=\frac{1}{2}m(\bar{V}_G)^2+\frac{1}{2}I_G(w)^2$ y que la energía potencial es V=Vg+Ve.

También $T=\frac{1}{2}(I_G+mr^2_{G/O})(w)^2$ y por el teorema de ejes paralelos. Se vé que $I_O = I + mr^2_{(G/O)}$, entonces

$$T=(\tfrac{1}{2})I_O\,(w)^2 \qquad (6\text{-}34\ a.)$$

Conservación de la energía $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$T_1=\frac{1}{2}m(v_m)^2+\frac{1}{2}I(w_m)^2=\frac{1}{2}m(b/2\ \dot{\theta}m)^2+\frac{1}{2}[1/12\ m(a^2+b^2)](\dot{\theta}_m)^2$

$V_1=-mg\ (b/2)$

$T_2=0$

$V_2=-mg(b/2\ \cos\theta m)$ Reemplazando en la Ecuación de conservación de la energía se tiene:

$\frac{1}{2}\,m(\dot{\theta}m)^2(a^2/3+b^2/12)-mgb/2=-mgb/2\cos\theta m$ o sea

$(\dot{\theta}^2)m\,(a^2/2+b^2/12)=gb.(1-\cos\theta m)$ pero $1-\cos\theta m=$

$=2\mathrm{Sen}^2.(\theta^2 m/2)$

para pequeñas amplitudes $2\,\mathrm{Sen}^2(\theta m/2)\approx 2(\theta m/2)^2\approx\theta^2 m/2$

entonces $\dot{\theta}^2 m\,(a^2/3+b^2/12)=gb(\theta^2)m/2$ y como $\theta m = A$ y $\dot{\theta}_m = Aw_n$.

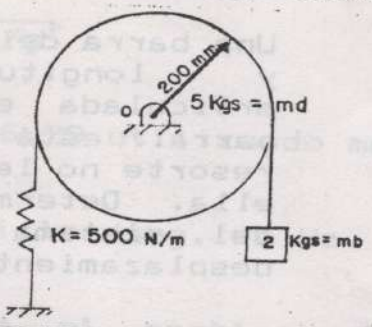
finalmente $(a^2/3+b^2/12)\,(Aw_n)^2=(gb/2)(A)$ y

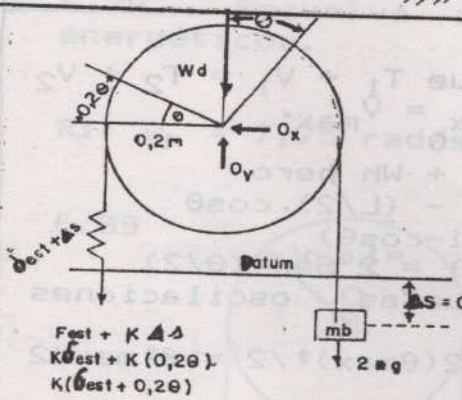
$$(w_n)^2=\frac{bg}{2\,(a^2/3+b^2/12)}$$

y $\tau=2\pi/w_n=2\pi\sqrt{(a^2+4b^2)/6\,bg}$ igual a la Ec. (6.28)

Ejemplo 6.9

Resolver el ejemplo 6.6 por métodos energéticos.





Solución:

Aplicando la ecuación de la energía mecánica total, se tiene:

$$E = T + V = cte \quad (1)$$

$$E = \{(\tfrac{1}{2}) Io(\dot{\theta})^2 + (\tfrac{1}{2}) m_b \cdot v^2_b\} + \{\tfrac{1}{2}k(\delta_{est} + 0,2\theta)^2 - W_b(0,2\theta)$$

Derivando esta ecuación se tiene:

$$0 = Io\,\dot{\theta}\,\ddot{\theta} + m_b v_b \cdot \dot{v}_b + k(\delta_{est} + 0,2\theta) \cdot 0,2\dot{\theta} - W_b(0,2\theta) \quad (2)$$

Como $s = 0,2\theta$;

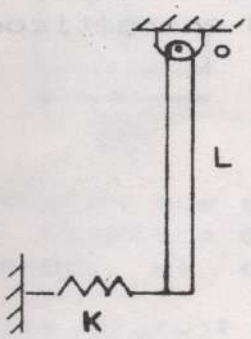
$$v_b = \frac{ds}{d\theta} = 0,2\dot{\theta}; \quad \dot{v}_b = 0,2\ddot{\theta} \text{ y además}$$

por equilibrio estático $k.\delta_{est} = (m_b)g$, entonces reemplazando en la Ec. (2) se tiene

$$Io.\dot{\theta}.\ddot{\theta} + m_b(0,2\dot{\theta}).(0,2\ddot{\theta}) + 0,2\,\dot{\theta}(m_b \cdot g) + (0,2)^2\theta\dot{\theta}k - mbg.(0,2\dot{\theta}) = 0$$

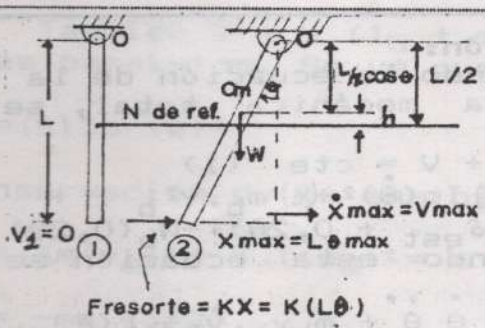
$$\ddot{\theta} + \frac{(0,2)^2\ (500)}{(Io + 0,2^2 \cdot m_b)} \cdot \theta = 0; \quad w_n = \sqrt{\frac{20}{[(\tfrac{1}{2}5 \cdot 0,2^2) + 0,04 \cdot 2]}} = 10,54 r/s$$

$$\tau = \frac{2\pi}{w_n} = \frac{2\pi}{10,54} = 0,596 \text{ seg.}$$



Ejemplo 6.10

Una barra delgada de masa m, y longitud L, está articulada en O. Cuando la barra está vertical el resorte no le aplica fuerza a ella. Determine el período del sistema para pequeños desplazamientos.



Solución:

Se sabe que $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$ o que $T_{max} = V_{max}$.

Así: $T_2 = 0$

$V_2 = \frac{1}{2}kx^2 + Wh$ pero

$h = (L/2) - (L/2).\cos\theta$

$= (L/2).(1-\cos\theta)$

y $(1-\cos\theta) = 2\,Sen^2(\theta/2)$

Para pequeñas oscilaciones

$$(1-\cos\theta\ max) = 2Sen^2(\theta max)/2 \approx 2(\theta max)^2/2 = \theta^2 max/2$$

De esta forma

$$V_2 = (\tfrac{1}{2})\,k(L\theta)^2 + (1/4)\,WL\,\theta^2 max$$

$$T_1 = \tfrac{1}{2}.Io\,(w)^2 = \tfrac{1}{2}.Io\,(\dot{\theta})^2_{max}\ ;\quad V_1 = 0$$

Como $T_{max} = V_{max}$, entonces

$$\tfrac{1}{2}.Io\,\dot{\theta}^2 max = \tfrac{1}{2}.k.(L\theta max)^2 + (1/4)\,WL\,\theta^2 max \text{ pero}$$

$$Io = [(1/12)\,mL^2 + m\,(L/2)^2] = (1/3)\,mL^2;$$

$$x_{max} = A = L\theta_{max};\ \dot{\theta}_{max} = A/L$$

$$x_{max} = Aw_n = L\theta_{max};\ \dot{\theta}_{max} = Awn/L$$

Por lo tanto, se tiene:

$$\tfrac{1}{2}.[(1/3)\,mL^2].\frac{A^2(w_n)^2}{L^2} = \tfrac{1}{2}.kL^2\,\frac{(A^2)}{L^2} + (1/4)\,WL\,\frac{(A^2)}{L^2}$$

simplificando

$$(w_n)^2 = 3k/m + 3\,g/2\,L$$

$$w_n = \sqrt{(3k/m + 3\,g/2\,L)}$$

Problemas/Sec. (6.7)

6.36 Resuelva el problema 6.28 utilizando métodos energéticos.

R: $\tau = 2\pi \sqrt{2r/g}$

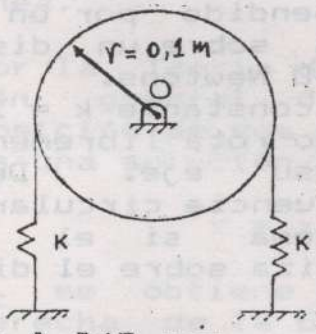
6.37 Resuelva 6.29 utilizando métodos energéticos.

R: f = 0,632 ciclos/seg. o Hz.

6.38 Resuelva el problema 6.2 utilizando métodos energéticos.

R: w_n = 7,75 rad/seg.

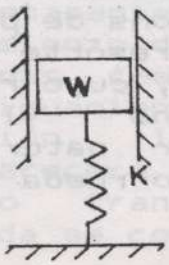
6.39



El disco de 3 Kgs de masa está articulada en O. Si los resortes tienen la suficiente tensión para impedir que la banda deslice sobre el disco, determine su período de vibración. Suponer que el alargamiento inicial en cada resorte es δ_o y que k= 500N/m.

R: τ = 0,243 seg.

6.40



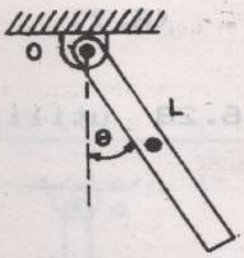
Un bloque de 10 Newton de peso descansa sobre un resorte de constante k. Determine este valor si la frecuencia natural es de 5 ciclos/seg.

R: k= 1.007,1 New/m =1,01 KN/m.

6.41 Resuelva el problema 6.1 utilizando métodos energéticos.

R: w_n = 24,49 rad/seg.

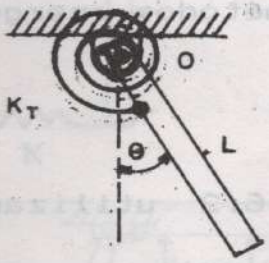
6.42



Una barra delgada uniforme de 4 Kilogramos de masa y 1 m de longitud está articulada en O. Determine el periodo de la barra para pequeñas oscilaciones.

R: τ = 1,64 seg.

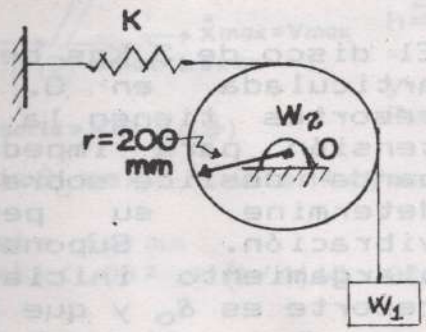
6.43



Resuelva el ejemplo 6.7 por método energéticos.

R: w_n = 22,03 rad/seg.

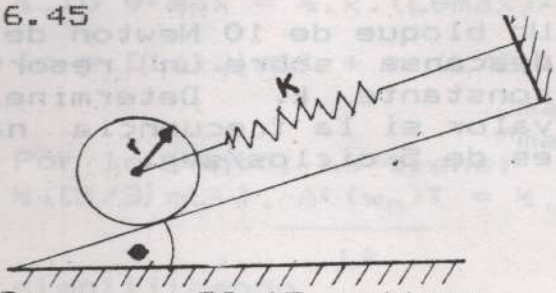
6.44



Un bloque W_1 = 30 Newtons está suspendido por un alambre que pasa sobre un disco uniforme W_2=40 Newtons.
La constante k = 20KN/m y el disco rota libremente respecto a su eje. Determine la frecuencia circular natural del sistema si el alambre no desliza sobre el disco.

R: w_n = 62,61 rad/seg.

6.45



El eje de un disco uniforme de 50 Newtons de peso, está unido por un resorte de constante k = 10 KN/m, cuyo radio es 200 m.m Determine la frecuencia circular natural si θ = 30° y el disco rueda sin deslizar

R: w_n = 36,15 rad/seg.

6.46 Resuelva el ejemplo 6.4 utilizando métodos energéticos.

R: $\tau = 2\pi \sqrt{L/2g}$

6.8. Vibraciones forzadas sin amortiguamiento

El movimiento vibratorio de mayor aplicación en el campo de la ingeniería (máquinas y estructuras) es el de la vibración forzada sin amortiguamiento. Esta vibración se produce cuando se aplica una fuerza que varía periódicamente, a un cuerpo soportado por resortes o apoyos elásticos o cuando se le comunica un movimiento periódico al cuerpo que soporta al sistema elástico. La fuerza variable se transmite al cuerpo mediante el resorte.

Sea una masa m atada a un resorte, que vibra verticalmente Fig. 6.3 y P(t) una fuerza externa aplicada que generalmente no es igual a la fuerza restauradora F del resorte.

La ecuación del movimiento de la masa m será:

$$m\,(d^2x/dt^2) + kx = P(t) \qquad (6\text{-}35)$$

Ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea.

Por la Teoria de las Ecuaciones diferenciales, la solución general de esta ecuación consiste de la superposición de dos partes: una solución complementaria x_c, más una solución particular, x_p. Por lo tanto,

$$x = x_c + x_p \qquad (6\text{-}36)$$

(1) x_c se obtiene igualando a cero el término de la derecha de la Ec. (6-35) y resolviendo la ecuación homogénea resultante, equivalente a la Ec. (6-14).

(2) x_p, es un valor que tendrá que sastifacer completamente la Ec. (6-35).
Al comienzo del movimiento las oscilaciones libres y forzadas coexistirán, pero bajo la influencia del amortiguamiento, que existe realmente debido a la fricción, la vibración libre con el tiempo desaparecerá, por eso a éste movimiento se le llama estado transitorio; mientras que la vibración forzada se conserva y se llama de estado permanente.

Casos:

6.8a.- **Vibración forzada sin amortiguamiento cuando la fuerza externa es constante: P(t) = Po.**
La solución particular de la Ec. (6-35), para este caso es $x_p = Po/k$ y la solución general de la misma, reemplazando valores en la Ec. (6-36) será:

será:

$$x_c = A \operatorname{Sen} (w_n t + \emptyset) + Po/k \qquad (6\text{-}37)$$

La Ec. (6-37) muestra que el movimiento es armónico respecto a la posición de equilibrio estático bajo la fuerza Po.
De hecho, $Po/k = \delta_{est}$ representa la deflexión estática de la masa m bajo la carga Po.

6.8b.- **Vibración forzada sin amortiguamiento cuando la fuerza externa es armónica: P(t) = Po SenΩt, o P(t) = Po cos Ω t.**
donde: Po = amplitud de la carga
Ω = Frecuencia forzada o frecuencia circular de la carga aplicada.
Se pueden considerar diferentes problemas como en los casos del bloque y el resorte indicados en las Figs. 6.12; 6.14 y 6.15 que representan la característica vibratoria de sistemas sujetos a fuerzas excitadoras armónicas
P(t) = Po . Sen Ω.t. caso a) masa m vibrando verticalmente.

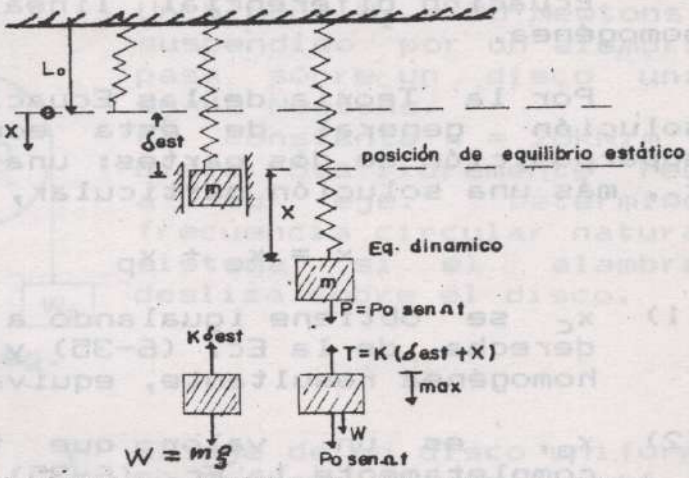


Fig. 6.12 Movimiento vertical de un cuerpo con vibración forzada.

La ecuación del movimiento, aplicando la segunda Ley de Newton será: $\Sigma Fx = max$; $Po \operatorname{Sen} \Omega t + W - k\delta_{est} - kx = m\ddot{x}$

o sea que

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = \frac{Po}{m} \operatorname{Sen} \Omega . t \qquad (6\text{-}38)$$

La solución complementaria será la Ec. (6-1) o sea $x_c = a \operatorname{Sen} w_n t + b \operatorname{Cos} w_n t$ donde $w^2_n = k/m$ y a y b, dos constantes arbitrarias.

Para la solución particular se supone una función armónica de la forma

$$x_p = B.\text{Sen } \Omega t \qquad (6\text{-}39)$$

en donde la amplitud B (constante) de la vibración forzada se determina sastisfaciendo la Ec. (6-38), con la Ec (6-39) y su segunda derivada así:

$\dot{x}_p = B\,\Omega \text{ Cos } (\Omega t)$, y, $\ddot{x}_p = -B.\Omega^2.\text{ Sen } \Omega t$; entonces en la Ec (6-38); $- B\Omega^2 . \text{ Sen } (\Omega t) + (k/m) B.\text{Sen } (\Omega t) = Po/m.\text{ Sen } (\Omega t;)$

finalmente se tiene:

$$B = \frac{P_o}{(k - m.\Omega^2)} = \frac{P_o/k}{(1 - (m/k)\Omega^2)} = \frac{P_o/k}{[1 - (\Omega/w_n)^2]} \qquad (6\text{-}40)$$

La solución particular será

$$x_p = \frac{P_o/k}{[1-(\Omega/w_n)^2]} \text{Sen}\Omega t \qquad (6\text{-}41)$$

Como $P_o/k = \delta_{est}$ es la deflexión estática máxima causada por la fuerza P(t) y $\Omega/w_n = \bar{n}$ es la relación entre la frecuencia forzada y la frecuencia circular, entonces.

$$x_p = \frac{\delta_{est}}{(1-\bar{n}^2)} \text{ Sen } \Omega t = \frac{P_o/k}{[1-(\Omega/w_n)^2]} \text{ Sen } \Omega.t \qquad (6\text{-}41')$$

y la solución general de la Ec. (6-38) será

$$x = x_c + x_p = \underbrace{a\text{Sen } w_n t + b\text{Cos} w_n t}_{\text{Vibración libre}} + \underbrace{\frac{P_o/k}{[1-(\Omega/w_n)^2]} \text{Sen } \Omega t}_{\text{Vibración forzada}} \qquad (6\text{-}42)$$

Después de cierto tiempo, debido al amortiguamiento, la vibración libre desaparecerá y solamente la vibración forzada permanecerá. De acuerdo a la Ec. (6-40) la amplitud de la vibración forzada depende de la relación $\Omega/w_n = \bar{n}$. Si definimos el factor de amplitud , como la relación entre la amplitud de la vibración del estado permanente $(x_p)_{max}$, a la deflexión estática $\delta_{est} = P_o/k$, causada por la amplitud de la fuerza periódica P_o, entonces:

$$\mathcal{H} = \frac{(x_p)_{max}}{\delta_{est}} = \frac{B}{P_o/k} = \frac{1}{[1-(\Omega/w_n)^2]} = \frac{1}{(1-\bar{n}^2)} \qquad (6\text{-}43)$$

La Fig. 6.13 muestra como varía $\mathcal{H}$ en función de $\bar{n} = \Omega/w_n$

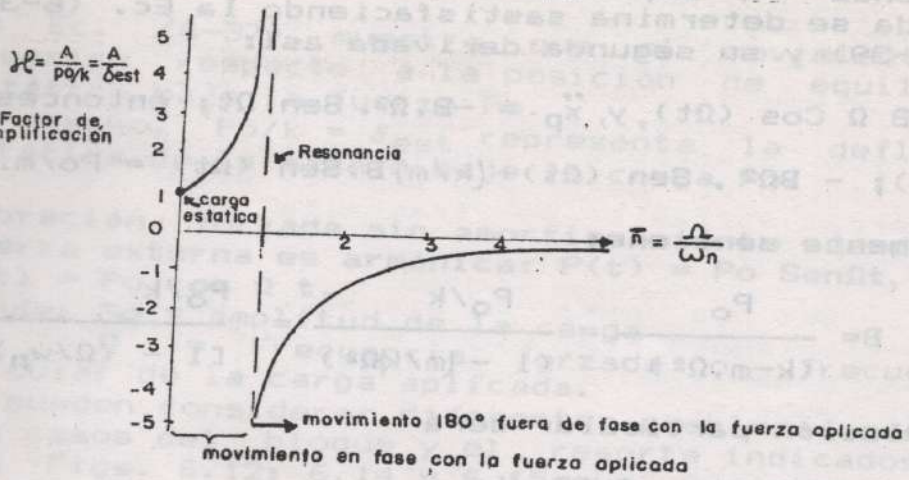


Fig. 6.13 Factor de amplificación en vibraciones forzadas

Casos de interés particular. Para a,b,c y d, ver fig. 6.13.

a) Si $\Omega = 0$ o sea $\bar{n} = 0$, $\mathcal{H} = 1$. Esto mismo ocurre si $\Omega \neq 0$ si $\Omega <<< w_n$. Aquí sólo están presentes los efectos estáticos. La vibración del bloque estará en fase con la fuerza aplicada P.

b) Cuando $\Omega = w_n$. o sea $\bar{n} = 1$, $\mathcal{H} = \infty$ La amplitud B de la vibración forzada tiende a infinito, obteniéndose la resonancia. Esta debe evitarse porque causa esfuerzos enormes y falla rápida de las partes.

c) Si $\Omega < w_n$, $\bar{n} < 1$; $\mathcal{H} > 1$ y la vibración forzada está en fase con la fuerza aplicada o con el desplazamiento y si $\Omega > w_n$; $\bar{n} > 1$; $\mathcal{H} < 1$ y la vibración forzada está 180° fuera de fase con la fuerza aplicada. Si el bloque se desplaza hacia abajo, la fuerza lo hace hacia arriba y recíprocamente. El signo del factor de amplificación indica si la dirección del movimiento de la masa vibrante es la misma o la opuesta de la fuerza aplicada.

d) Si $\Omega >> w_n$, $\bar{n}$ es muy grande y $\mathcal{H}$ tiende a cero. El efecto de la fuerza externa se hace despreciable y la masa permanece estacionaria debido a su inercia.

Caso b- . Vibración de la masa m al desplazarse horizontalmente. Fig. 6.14.

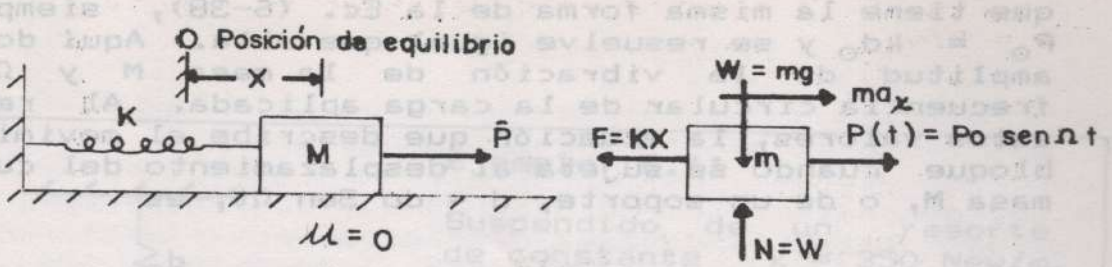


Fig. 6.14 Vibración forzada de un cuerpo que se desplaza horizontalmente.

En la Fig. 6.14.b. se indican los diagramas de cuerpo libre y cinético, donde x es el desplazamiento del resorte.

Aplicando la segunda Ley de Newton se tiene:

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = m_{ax};\ P_o \operatorname{Sen}(\Omega t) - kx = m\ddot{x} \qquad \text{o sea que}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = \frac{P_o}{m} \cdot \operatorname{Sen}(\Omega t)$$ igual a la Ec. (6-38) del caso a. Resolviéndose igual que se hizo con la ecuación diferencial de segundo orden no homogénea.

Caso c. Vibración de la masa m de un cuerpo respecto al desplazamiento d, de otro de masa M; al cual está atado.

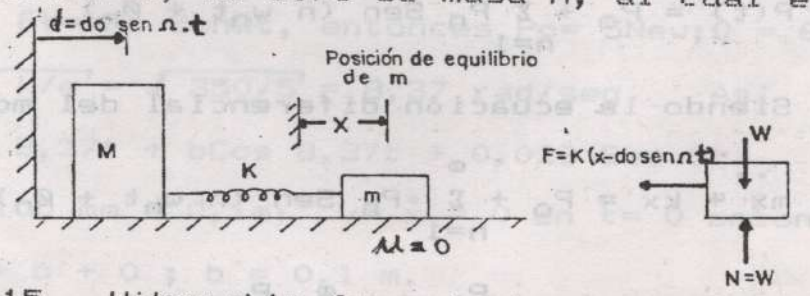


Fig. 6.15. Vibración forzada de un cuerpo respecto al desplazamiento de otro de masa M.

En la Fig. 6.15 el desplazamiento total del resorte será $(x - d)$ siendo $d = d_o \operatorname{Sen} \Omega t$, medido respecto al sistema fijo, entonces $(x - d) = (x - d_o \operatorname{Sen} \Omega t)$.

La ecuación del movimiento de acuerdo a la segunda Ley de Newton

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = m_{ax} \text{ es } -k\,(x - d_o \operatorname{Sen} \Omega t) = m\ddot{x} \qquad \text{o sea}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = \left(\frac{k d_o}{m}\right) \cdot \operatorname{Sen} \Omega t \qquad (6\text{-}43')$$

que tiene la misma forma de la Ec. (6-38), siempre que $P_o = kd_o$ y se resuelve igual que ella. Aquí do es la amplitud de la vibración de la masa M y Ω es la frecuencia circular de la carga aplicada. Al reemplazar estos valores, la ecuación que describe el movimiento del bloque cuando se sujeta al desplazamiento del cuerpo de masa M, o de un soporte, d = do Sen Ωt, es

$$x = x_c + x_p = a\,\mathrm{Sen}\, w_n t + b\,\mathrm{Cos}\, w_n t + \frac{d_o}{[1-(\Omega/w_n)^2]}\,\mathrm{Sen}(\Omega t) \qquad (6\text{-}43'')$$

ya que $$B = \frac{kd_o/k}{[1-(\Omega/w_n)^2]} = \frac{d_o}{[1-(\Omega/w_n)^2]}$$

6.8c. Vibración forzada sin amortiguamiento cuando la fuerza externa es periódica.
Para este caso se supone que la fuerza externa P(t) es periódica con periódo; $\mathcal{T} = 2\pi/w_n$

Se resuelve utilizando la expansión de las series de Fourier's, concepto fuera del alcance de éstas lecciones de dinámica.

$$P(t) = P_o + \sum_{n=1}^{\infty} P_n\,\mathrm{Sen}\,(n\,w_n t + \varnothing_n)$$

Siendo la ecuación diferencial del movimiento

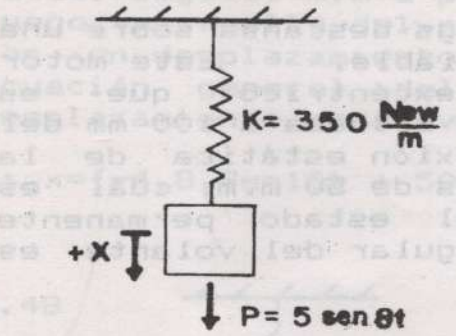
$$m\ddot{x} + kx = P_o + \sum_{n=1}^{\infty} P_n\,\mathrm{Sen}\,(n\,w_n t + \varnothing_n)$$

o

$$\ddot{x} + (w_n)^2 x = \frac{P_o}{k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n}{k}\,\mathrm{Sen}\,(n\,w_n t + \varnothing_n)$$

ecuación parecida a (6-35).

Ejemplo 6.11



Suspendido de un resorte de constante k = 350 New/m, se encuentra un bloque de 5 Kgs de masa. Se hala 100 mm y luego se suelta del reposo en t = 0. Si el bloque se sujeta a la acción de una fuerza vertical de P=(5Sen6t) New, determine la ecuación que describe el movimiento vertical del bloque.

Solución:

Según la Ec. general (6-42); $x = a\,Sen\ w_n t + b\,Cos w_n t + \dfrac{Po/k}{[1-(\Omega/w_n)^2]}\,Sen\ \Omega t$

y sabiendo que

P= 5 Sen 6t= Po SenΩt, entonces Po= 5New; Ω = 6rad/s

y $w_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{350/5} = 8,37$ rad/seg. Así

$x = a\,Sen\ 8,37t + b\,Cos\ 8,37t + 0,029\ Sen\ 6t \quad (1)$

como x= 100 mm = 0,1m; $v = \dot{x} = 0$ en t= 0 entonces

0,1 = 0 + b + 0 ; b = 0,1 m.

Derivando la ecuación (1) se tiene:

$\dot{x} = a(8,37)Cos\ 8,37t - b(8,37)Sen\ 8,37t + 0,174Cos\ 6t$

0= 8,37a + 0,174 ; a = −0,02 por lo tanto

la ecuación del movimiento vertical es

x= (−0,02 Sen 8,37t + 0,1 Cos 8,37t + 0,174 Cos 6t)m

Ejemplo 6.12

Un motor eléctrico de masa 30 Kgs descansa sobre una viga horizontal de masa despreciable. Este motor hace girar a un volante excéntrico que es equivalente a una masa de 2 Kgs situada a 100 mm del eje de rotación. Si la deflexión estática de la viga debida al peso del motor es de 50 m.m; cuál es la amplitud de la vibración del estado permanente del motor, cuando la rapidez angular del volante es $\Omega = 12$ rad/seg.

Solución:

La vibración del estado permanente del motor está dada por la ecuación (6-41') así:

$$(x_p) = \frac{P_o/k}{[1-(\Omega/w_n)^2]} \text{ Sen } \Omega t \qquad (1)$$

Pero W= kx por equilibrio estático o sea

$k = 30 \cdot 9{,}8/0{,}05 = 5{,}880$ New/m y

$w_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{5.880/30} = 14$ rad/seg.

La fuerza periódica que hace vibrar el motor es la fuerza centrífuga debida al efecto desbalanceador del motor y tiene un valor constante de

$$P_o = m\omega_n = m\frac{v^2}{r} = mr\,\Omega^2 = 2\,(0{,}1)(12)^2 = 28{,}8 \text{ New}$$

$$(x_p)_{max} = \left|\frac{P_o/k}{[1-(\Omega/w_n)^2]}\right| = \left|\frac{28{,}8/5.880}{[1-(12/14)^2]}\right| = 0{,}034\text{m}$$

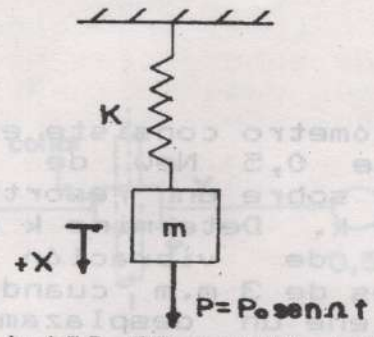
$$= 34{,}29 \text{ m.m}$$

Problemas/ Sec. (6.8)

6.47 Suspendido de un resorte de constante k = 600 New/m, se encuentra un bloque de 5 Kgs de masa. Se hala hacia abajo 50 m.m a partir de la posición de equilibrio y luego se suelta del reposo en t= 0. Si el apoyo se mueve con un desplazamiento de d= (10 Sen 4t) m.m. Escriba la ecuación general del movimiento vertical del bloque. Desplazamiento positivo hacia abajo.

R: x=(-4,8 Sen10t + 50 Cos10t + 12 Sen4t) m.m

6.48



El resorte de la figura se alarga 200 m.m cuando se une a un bloque de 5 Kgs. de masa, al cual se le aplica una fuerza P= 100 Sen2t New. Si baja 50 m.m desde su posición de equilibrio y luego se suelta del reposo en t= 0. Determine la ecuación de su movimiento.

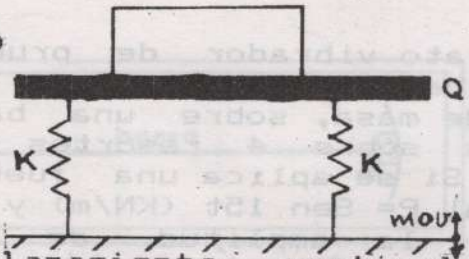
R: x= (-126,98 Sen7t + 50Cos7t + 444,44 Cos2t) m.m

6.49 Un motor está montado sobre una cimentación apoyada en resorte. Describa la vibración del estado permanente del sistema si el bloque y el motor tienen una masa total de 1.000 Kgs. y el motor cuando está funcionando crea una fuerza P= (50 Sent) New. El sistema vibra solo en la dirección vertical y la rigidez total de los resortes es k= 2 KNew/m Determine la rapidez rotacional Ω del motor que causará resonancia.

R: x_p = 50,30 Sent (m.m)

$\sim$ = w_n = 1,41 rad/seg.

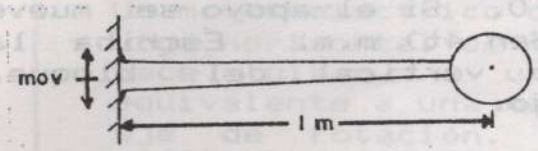
6.50



Un aparato está centrado sobre la plataforma Q, que a su vez descansa sobre cuatro resortes, cada uno de constante k = 250 N/m. Si el piso está sujeto a una vibración de Ω= 2 Hz que tiene una amplitud en su desplazamiento vertical de d_o = 10 m.m, determine la amplitud del desplazamiento vertical de la plataforma y el aparato, si estos tienen una masa total de 10 Kgs.

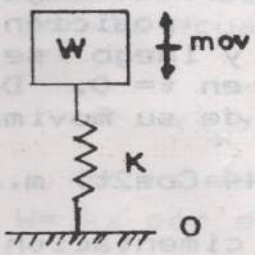
R: B = $(x_p)_{max}$ = 17,24 m.m

6.51 Una barra elástica ligera soporta una esfera de 4 Kgs de masa. Cuando se aplica a la esfera una fuerza vertical de 10 New., la barra se flexiona 10 m.m. Si la pared oscila con una frecuencia de 2 Hz y tiene una amplitud de 20 m.m, encuentre la amplitud de vibración para la esfera.



R: $B = (x_p)_{max} = 54,37$ m.m

6.52 Un acelerómetro consiste en un bloque de 0,5 New de peso colocado sobre un resorte de constante k. Determine k si la amplitud de vibración del bloque es de 3 m.m cuando la base O tiene un desplazamiento vertical d= 1,25 Sen5t (m.m)

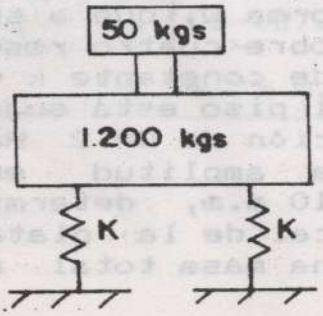


R: k = 2,19.N/m

6.53 Determine la amplitud de vibración del bloque en el problema 6.52, si la frecuencia forzada se reduce en el 50% y el valor de la constante k= 2,19 N/m

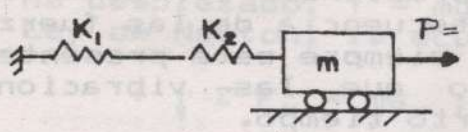
R: $B = (X_p)_{max} = 1,46$ m.m

6.54 Un aparato vibrador de prueba consta de una plataforma de 50 Kgs. de masa, sobre una base situada sobre 4 resortes de aire. Si se aplica una fuerza vertical P= Sen 15t (KN/m) y se limita la amplitud de la vibración de la base a 1 m.m, determine la constante del resorte requerida.



R: k_T=1.281,25 KN/m para cada 4 resortes.

6.55

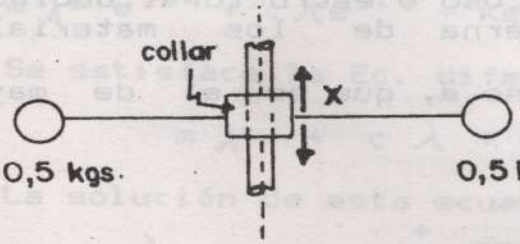


Un cuerpo de 40 Kgs de masa se une a la pared por dos resortes cuyas constantes son $K_1=10^3$ New/m y K_2=500New/m. La fuerza P varia así: P= 10 Sen (2t). Ecuación que describa mov. de vibración del estado permanente y la velocidad máxima del cuerpo.

R: $x= 0,058 \text{ Sen } 2t \text{ (m)}$

$\dot{x}_{max} = v_{max} = 0,116$ m/seg.

6.56



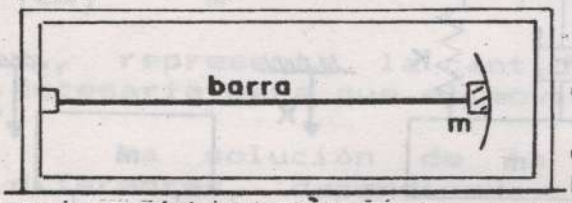
Dos esferas estan unidas a los extremos de una barra elástica, que deflecta 4 m.m cuando la fuerza de 2N es aplicada estáticamente a la esfera. Si el collar central tiene un movimiento armónico vertical con una frecuencia de 4 Hz y una amplitud de 3 m.m, encuentre la amplitud máxima x_o de la vibración vertical de cada esfera.

R: $x_o = 8,14$ m.m

6.57 Un bloque de 20 Newtons está colocado en un resorte, sobre el armazón de un motor que gira a 1200 r.p.m. El motor está desequilibrado y la amplitud del movimiento resultante del bloque es de 10 m.m. Si la constante del resorte es k= 30 KN/m. determine la amplitud del movimiento del motor para el estado permanente.

R: d_o= 0,73 m.m

6.58



Un vibrómetro es un aparato formado por una caja que contiene una barra delgada a la que se le fija en el extremo una masa m. La frecuencia circular natural del sistema barra masa es 10 Hz. Cuando la caja está rígidamente unida a la armazón de un motor que gira a 1.200 r.p.m. se observa que la masa vibra con una amplitud de 2m.m relativa a la caja. Obtenga la amplitud del movimiento vertical del motor.

R: d_o= 1,5 m.m

6.9 Vibraciones libres amortiguadas

Las vibraciones sin amortiguamiento perfecto no existen en la naturaleza y su importancia es la de la comprensión de las vibraciones forzadas con amortiguamiento. Como consecuencia de las fuerzas de roce el amortiguamiento siempre está presente y es a consecuencia de ello que las vibraciones desaparecen despues de cierto tiempo.
La naturaleza del amortiguamiento depende de las circunstancias bajo las cuales la vibración tiene lugar.
Los tipos de amortiguamiento son:

a) Amortiguamiento viscoso debido a la resistencia del fluido (gas o líquido).
b) Amortiguamiento de Coulomb, producido por el movimiento relativo de superficies secas.
c) Amortiguamiento viscoso o estructural debido a la fricción interna de los materiales elásticos

Se estudiará el caso a, que es el de mayor interés.

6.9.1- Amortiguamiento Viscoso

Se caracteriza porque la fuerza de roce es directamente proporcional a la velocidad del cuerpo en el fluido. La fuerza amortiguadora viscosa es $f = -c\dot{x}$. donde la constante c es llamada coeficiente de amortiguamiento viscoso. El signo de la fuerza se debe a que se opone siempre a la dirección de la velocidad.
Esta clase de amortiguamiento se aplica a velocidades bajas y moderadas utilizadas como una buena aproximación al deslizamiento de superficies bien lubricadas.
Sea un cuerpo de masa m unido a un resorte de constante k y a un amortiguador viscoso de constante c., representado en la Fig 6.16

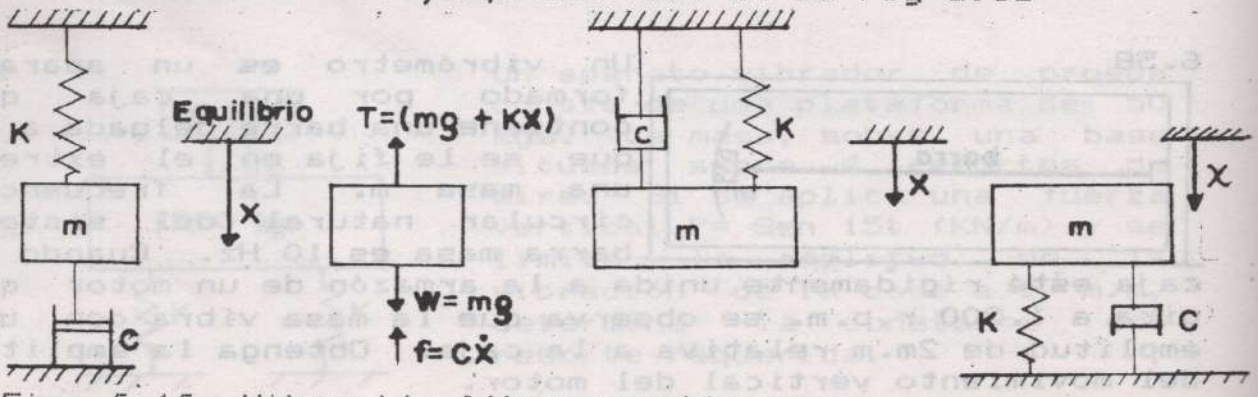


Fig. 6.16 Vibración libre amortiguada

En la Fig. 6.16 se ha supuesto que x, $\dot{x}$ y $\ddot{x}$ son positivos hacia abajo. Cuando el cuerpo está en equilibrio estático f= 0 y T = mg. Cuando el cuerpo se ha desplazado, T = mg + kx y por aplicación de la segunda Ley de Newton, la ecuación del movimiento es:

$$+\downarrow \Sigma F_x = ma_x \; ; \quad mg - (mg + kx) - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad (6\text{-}44)$$

Ecuación diferencial lineal, de segundo orden homogéneo con coeficientes constantes. Su solución se obtiene suponiendo que $x = De^{\lambda t}$ y calculando a continuación los valores de D y λ que satisfacen la ecuación diferencial con sus condiciones iniciales. Entonces en la Ec. (6-44) se tiene:

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} + c\lambda e^{\lambda t} + Ke^{\lambda t} = 0; \quad De^{\lambda t}.(m.\lambda^2 + c\lambda + k) = 0$$

Se satisface la Ec. diferencial si D= 0 o si

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \qquad (6\text{-}45)$$

La solución de esta ecuación es:

$$\lambda = -c/2m \pm \sqrt{(c/2m)^2 - k/m} \qquad (6\text{-}46)$$

como $w^2n = k/m$, entonces:

$$\lambda = -c/2m \pm \sqrt{(c/2m)^2 - (wn)^2} \qquad (6\text{-}46')$$

La solución general de la Ec. (6-44) es la combinación lineal de exponenciales que involucra ambas raíces y un parámetro importante es el obtenido cuando la cantidad subradical de la Ec. (6-46) se hace igual a cero. El valor de c que satisface esta condición se llama coeficiente de amortiguamiento crítico c_{cr}, cuyo valor es

$$\frac{(c_{cr})^2}{(2m)^2} - \frac{k}{m} = 0 \quad o \quad Ccr = 2m\sqrt{k/m} = 2m\, w_n = 2\sqrt{km} \qquad (6\text{-}47)$$

c_{cr} representa la cantidad mínima de amortiguamiento necesaria para que el movimiento no sea vibratorio.

La solución de la Ec. (6-45) tiene tres formas diferentes, dependiendo del valor de c con respecto a c_{cr}; O sea;

1) $\frac{c}{2m} > \sqrt{k/m}$; o $c > 2\sqrt{km}$, o $c > c_{cr}$; sobre-amortiguamiento

2) $\frac{c}{2m} = \sqrt{k/m}$, o $c = 2.\sqrt{km}$, o $c = c_{cr}$; amortiguamiento crítico.

3) $\frac{c}{2m} < \sqrt{k/m}$; o $c < 2\sqrt{km}$; o $c < c_{cr}$; subamortiguamiento

También utilizando la relación de amortiguamiento crítico β, definido como la razón entre el coeficiente de amortiguamiento real c y el coeficiente crítico c_{cr}, se tiene:

$$\beta = c/c_{cr} \qquad (6-48)$$

entonces sí:

1.- β > 1 el sistema está sobre - amortiguado
2.- β = 1 el sistema está críticamente amortiguado
3.- β < 1 el sistema está subamortiguado

1.- Sistema Sobreamortiguado $c > c_{cr}$.

Las raices λ_1 y λ_2 de la Ec. (6-46) son reales y distintas. La solución general de la Ec. (6-44) es.

$$x = D_1 e^{(\lambda_1 t)} + D_2 e^{(\lambda_2 t)} \qquad (6-49)$$

donde D_1 y D_2 son constantes. Los exponentes λ_1 y λ_2 son ambos negativos y x decrecerá exponencialmente desde su valor inicial $x_o = D_1 + D_2$ sin cambiar de signo tendiendo a cero a medida que t crece. Este movimiento no es vibratorio. El efecto del amortiguamiento es tan fuerte que cuando el bloque se desplaza y se suelta regresa a su posición original sin oscilar, Fig. 6.17.

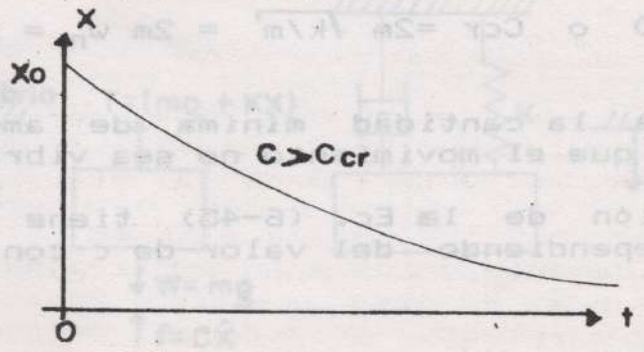


Fig. 6.17 - Movimiento no vibratorio en un sistema sobre amortiguado.

2.- **Sistema críticamente amortiguado. $c = c_{cr}$**

En este caso las raíces

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{c_{cr}}{2m} = \frac{-2\sqrt{km}}{2m} = -\sqrt{k/m} = -w_n$$

y la solución de la Ec. (6-44) es

$$x = (D_1 + tD_2)e^{\lambda t} = (D_1 + D_2 t)e^{(-w_n)t} \qquad (6\text{-}50)$$

Este movimiento no es vibratorio. Conforme t tiende a infinito, $e^{-w_n t}$ tiende a cero. Es el caso límite del sobreamortiguamiento. Son de importancia en ingeniería, ya que el tiempo que requiere el sistema para retornar al reposo es el mínimo posible sin oscilaciones. Fig. 6.18. Cambia de signo una vez el valor de x.

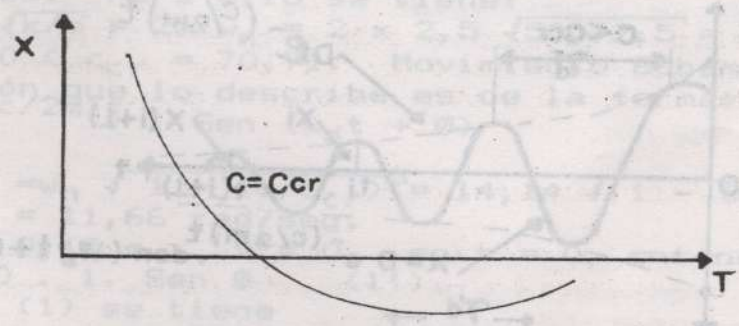


Fig. 6.18 - Movimiento no vibratorio en un sistema críticamente amortiguado.

3.- **Sistema Subamortiguado - $c < c_{cr}$.**

Es el caso mas importante de los tres. Las raíces λ_1 y λ_2 de la Ec. (6-46) son números complejos. Se puede demostrar que la solución general de la Ec. (6-44) es de la forma

$$x = D\, e^{-(c/2m)t} \cdot \text{Sen}\,(w_d t + \emptyset) \qquad (6\text{-}51)$$

donde D y $\emptyset$ son constantes que dependen de las condiciones iniciales del problema. La constante w_d. es la frecuencia natural amortiguada del sistema y es igual a:

$$w_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{2m}} = \sqrt{w^2_n - \left(\frac{w_n c}{c_{cr}}\right)^2} = w_n\sqrt{1-(c/c_{cr})^2}$$

$$= w_n\sqrt{1-(\beta)^2} \qquad (6\text{-}52)$$

donde $c/c_{cr} = \beta$

La Ec. (6-51) define un movimiento vibratorio cuya amplitud $De^{-(c/2m)t}$ decrece con el tiempo. Aunque este movimiento en realidad no se repite, sin embargo, se acostumbra a llamar periódo amortiguado τ_d, al intervalo de tiempo entre pares sucesivos de ceros o picos del movimiento. De acuerdo a la Ec. (6-16)

$$\tau_d = \frac{2\pi}{w_d}, \quad f_d = \frac{w_d}{2\pi} \qquad (6\text{-}53)$$

como $w_d < w_n$, entonces $\tau d > \tau = \frac{2\pi}{w_n}$ Ver Fig. 6.19

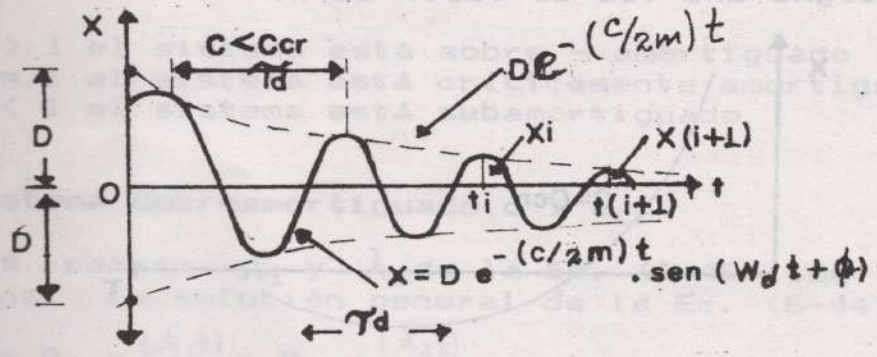
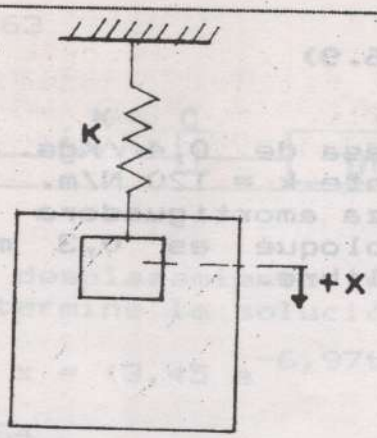


Fig. 6.19 - Movimiento vibratorio de un sistema subamortiguado.

Un ejemplo sería el de los amortiguadores de los automóviles. Estando nuevo, este no rebota continuamente sobre las sinuosidades del camino, está sobre amortiguado. Por el uso pasa de sobreamortiguado a subamortiguado a través del amortiguamiento crítico.



Ejemplo 6.13

Un bloque cuya masa es 2,5 Kgs, se introduce en un líquido de manera que la fuerza amortiguadora sobre el bloque es f= 40|v|New. La constante del resorte es k= 500 N/m. Si el bloque se hala hacia abajo 150 m.m y luego se suelta desde el reposo, escriba la ecuación del movimiento.

Solución:

m= 2,5 Kgs; f= 40|v|=cv; c=40
k= 500New/m x=150m.m = 0,15m

El movimiento vibratorio es libre, amortiguado. Se buscará si este movimiento es sobre, sub o amortiguado. Para ello se tiene:

$c_{cr} = 2m\sqrt{k/m} = 2m\, w_n = 2 \times 2,5\sqrt{500/2,5} = 70,71$

como $c = 40 < c_{cr} = 70,71$. Movimiento Subamortiguado y la ecuación que lo describe es de la forma:

$x = De^{-(c/2m)t} \cdot \text{Sen}(w_d t + \emptyset)$ (1)

además $w_d = w_n\sqrt{1 - (c/c_{cr})^2} = 14,14\sqrt{1 - (40/70,71)^2}$
$= 11,66$ rad/seg.

Para $x = 0,15$ m ; $v = 0$ en t = 0, entonces en (1)

$0,15 = D \cdot 1 \cdot \text{Sen}\,\emptyset$ (1')

Derivando (1) se tiene

$$\dot{x} = v = D\left[-\frac{c}{2m}e^{-(c/2m)t}\,\text{Sen}(w_d t + \emptyset) + e^{-(c/2m)t}\cdot\text{Cos}(w_d t + \emptyset)w_d\right]$$

aquí $0 = D\left[-\frac{c}{2m}\text{Sen}\,\emptyset + w_d\,\text{Cos}\,\emptyset\right]$, como $D \neq 0$

entonces; $-\frac{c}{2m}\cdot\text{Sen}\,\emptyset + w_d\,\text{Cos}\,\emptyset = 0$

$$\text{Tg}\,\emptyset = \frac{2m\,w_d}{c} = \frac{2 \times 2,5 \times 11,66}{40} = 1,4575$$

$\emptyset = \text{arctg}\,(1,4575) = 55,55°$; $\frac{c}{2m} = \frac{40}{2 \times 2,5} = 8$

Reemplazando en la ec. (1') se tiene D, asi:

$$D = \frac{0,15}{\text{Sen}\,\emptyset} = \frac{0,15}{\text{Sen}\,55,55°} = 0,182$$

Reemplazando todos estos valores en la Ec (1) se tiene:

$$x = 0,182\,e^{-8t}\cdot\text{Sen}\,(11,66t + 55,55°)$$

Problemas/Sec. (6.9)

6.59 Un bloque que tiene una masa de 0,4 Kgs. está sostenido por un resorte de constante k = 120 N/m. Si un amortiguador proporciona una fuerza amortiguadora de 3 Newton cuando la rapidez del bloque es 0,3 m/seg. determine el período de vibración libre.

R: τ_d = 0,524 seg.

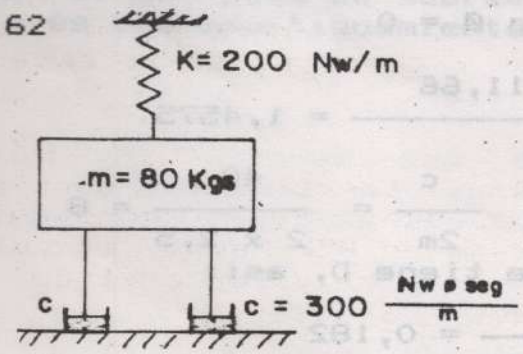
6.60 El alma de un cañon tiene una masa de 400 Kgs y después de disparar retrocede 0,80 m. Si regresa a su posición original por medio de un solo recuperador cuyo coeficiente de amortiguamiento es 2,5 KN x seg/m, determine la constante k de cada uno de los dos resortes fijos a la base y unidos al alma de tal manera que ésta se regrese sin vibración. Sugerencia (Se presenta un amortiguamiento crítico).

R: k = 1,95 KNew/m.

6.61 Un bloque de 4 Kgs de masa, está sostenido por un resorte de constante k = 1 KNew/m, que se mueve en un medio que proporciona una fuerza amortiguadora f = 60|v|New. Si se le dá una velocidad hacia arriba de 0,8 m/seg. a partir de su posición de equilibrio en t=0, determine la posición del bloque en función del tiempo. (Desplazamiento positivo hacia abajo).

R: $x = -57{,}5\, e^{-7{,}5t}$. Sen (13,92t + 0)m.m

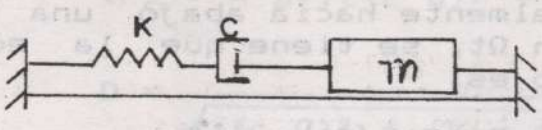
6.62



Determine la ecuación diferencial de movimiento para el sistema vibratorio amortiguado indicado. Que tipo de movimiento se realiza?

R: $\ddot{x} + 7{,}5\,\dot{x} + 2{,}5\,x = 0$ Mov. vibratorio libre amortiguado.

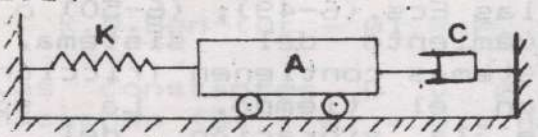
6.63



Un cuerpo de masa 2 Kgs está en serie con un resorte y un amortiguador. El resorte tiene una constante k = 600 New/m. y su coeficiente de amortiguamiento es: c = 100 N x seg/m. La masa se suelta del reposo con un desplazamiento inicial x_o = 40 m.m. Determine la solución general del movimiento vibratorio.

R: $x = (3{,}45\ e^{-6{,}97t} + 0{,}55\ e^{43{,}03t})$ cms.

6.64

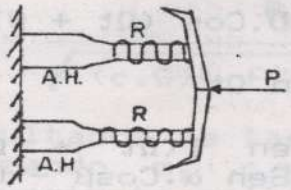


En la figura el cuerpo A tiene una masa de 2 Kgs y un resorte de constante k = 50 New/m. Su amortiguamiento es crítico. Si el cuerpo se desplaza 5 cms. hacia la derecha y luego se suelta imprimiéndole una velocidad inicial de 50 cms/seg., hacia la izquierda, encuentre el valor de c_{cr} y la posición y velocidad de A cuando t = 0,20 seg.

R: C_{cr} = 20 New ■ seg/m.

$x_{0,2} = 0$; $\dot{x}_{0,2} = -92$mm/seg.

6.65



En el mecanismo amortiguador de choque de la defensa de un auto, actuan concéntricamente dos resortes R con dos amortiguadores hidráulicos (A.H). La constante k de cada resorte es 3 KN/m y la masa de la defensa es 50 Kgs. Se desea que la defensa se comprima en el mínimo tiempo, cuando está sujeta a la fuerza impulsiva $\bar{p}$, sin que haya oscilación después en el rebote. Encuentre el valor de la constante de amortiguamiento que se necesita en cada amortiguador para lograr lo anterior.

R: c = 547,72 New ■ seg/m

6.66 El período τ de la oscilación lineal amortiguada para una masa de 1 Kgs es 0,32 seg. Si la constante k del resorte que sostiene la masa es 850 New/m, calcule el coeficiente de amortiguamiento c y el valor crítico c_{cr}. Suponer sistema subamortiguado.

R: c = 43,11 New ■ seg/m.

c_{cr} = 58,31 New ■ seg/m.

6.10. - Vibraciones Forzadas amortiguadas

Asumiendo que sobre los cuerpos de masa m, de la Fig. 6.16, actua verticalmente hacia abajo una fuerza periódica $P(t) = Po\ Sen\ \Omega t$, se tiene que la ecuación diferencial del movimiento es.

$$mg - (mg + kx) - c\dot{x} + Po\ Sen(\Omega t) = m\ddot{x} \quad o$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Po.Sen(\Omega t) \qquad (6-54)$$

La solución general será $x = x_c + x_p$.

La solución complementaria es la misma que la de la Ec.(6-44) y está dada por las Ecs.(6-49); (6-50) o (6-51) dependiendo del amortiguamiento del sistema. Sin embargo, como todos los sistemas contienen fricción esta solución se disipará con el tiempo. La solución particular, que describe la vibración del estado permanente será la que se conservará.

Debido que la fuerza aplicada es armónica, su movimiento será también armónico y la solución particular será de la forma

$$x_p = D.Sen.(\Omega t + \emptyset) \quad o \quad x_p = D\ Sen\ (\Omega t - \emptyset) \qquad (6-55)$$

donde D y $\emptyset$ se determinan satisfaciendo la Ec. diferencial. Sustituyendo x_p y sus derivadas con respecto al tiempo en la Ec (6-54) se tiene:

$$- m.\Omega^2.D.Sen(\Omega t + \emptyset) + c.\Omega.D.Cos\ (\Omega t + \emptyset)$$

$$+ k.D.Sen\ (\Omega t + \emptyset) = P_o\ Sen\ \Omega t$$

Haciendo $P_o.Sen\ \Omega t = P_o.Sen\ [(\Omega t + \emptyset) - \emptyset]$ y desarrollando el $Sen\ (\alpha - \beta) = Sen\ \alpha.Cos\beta - Cos\alpha.Sen\beta$ se tiene:

$$(k - m\Omega^2)D.Sen\ (\Omega t + \emptyset) + c\Omega.D.Cos\ (\Omega t + \emptyset) =$$

$$= P_o.Sen\ (\Omega t + \emptyset).Cos\emptyset - P_o.Cos(\Omega t + \emptyset).Sen\ \emptyset$$

Igualando los coeficientes de Seno y Cos $(\Omega t + \emptyset)$ se tiene

$$- P_o.Sen\ \emptyset = c.\Omega.D \qquad (6-56)$$

$$P_o.Cos\ \emptyset = D.(k - m\Omega^2). \qquad (6-57)$$

Dividiendo término a término las Ecs. (6-56) y (6-57) y elevando al cuadrado y sumando después, $\emptyset$ y la amplitud D estan expresadas por:

$$- \text{Tg } \phi = \text{Tg } (-\phi) = c\,\Omega/(k - m\Omega^2) \qquad (6\text{-}58)$$

$(P_o)^2 = D^2.[(c\,\Omega)^2 + (k - m\,\Omega^2)^2]$ de donde

$$D = \frac{P_o}{\sqrt{(c\,\Omega)^2 + (k - m\,\Omega^2)^2}} = \text{magnitud pico del movimiento.} \qquad (6\text{-}59)$$

También se pueden obtener Tg Ø y D, utilizando $x_p = D.\text{Sen } (\Omega t - \phi)$. Sustituyendo x_p y sus derivadas respecto al tiempo en la Ec. (6-54) se tiene:

$$- m.\Omega^2.D.\text{Sen } (\Omega t - \phi) + c.\Omega.D.\text{Cos } (\Omega t - \phi) +$$

$$k.D.\text{Sen } (\Omega t - \phi) = P_o.\text{Sen } \Omega t.$$

Las constantes D y Ø pueden determinarse, primero haciendo $(\Omega t - \phi) = 0$ y después haciendo $(\Omega t - \phi) = \pi/2$, de esta manera

$P_o.\text{Sen } \phi = c.\Omega.D$ parecida a la Ec. (6-56) y

$P_o.\text{Cos } \phi = D.(k - m\Omega^2)$ igual a la Ec. (6-57).

Dividiendo estas dos ecuaciones término a término se tiene:

$\text{Tg } \theta = c\,\Omega/(k - m\,\Omega^2)$ igual a la Ec. (6-58) y sumando los cuadrados de las mismas ecuaciones entonces:

$$D = \frac{P_o}{\sqrt{(c.\Omega)^2 + (k - m.\Omega^2)^2}}$$ igual que la Ec. (6-59)

Los resultados de las Ecs. (6-58) y (6-59) se simplifican reemplazando m, c y k por $w_n = \sqrt{k/m}$ y la relación de amortiguamiento crítico,

$$\beta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m.w_n}$$ en ellas; queda así:

$$\text{Tg } \phi = \frac{(2m.w_n.\beta.\Omega)\,(1/m)}{(k/m - \Omega^2)} = \frac{2.\beta.\Omega.w_n}{(w^2_n - \Omega^2)} \qquad (6\text{-}60)$$

$$D = \frac{P_o/k}{[(1 - \Omega^2/w^2_n)^2 + 4\,\beta^2\Omega^2/w^2_n]^{1/2}} \qquad (6\text{-}61)$$

El factor de amplificación dinámico de la amplitud D, definido antes, en las vibraciones forzadas sin

amortiguamiento es:

$$\text{factor de amplificación dinámica} = F.A.D = \frac{D}{\delta_{est}} = \frac{D}{Po/k}$$

$$F.A.D = \frac{1}{\left[(1 - \Omega^2/w^2_n)^2 + 4\,\beta^2\,\Omega^2/w^2_n \right]^{1/2}} \qquad (6\text{-}62)$$

Las curvas representadas en la Fig. 6.20 muestran la variación del factor de amplificación dinámica (F.A.D) contra la razón de frecuencia Ω/w_n para diversos valores de la relación de amortiguamiento $\beta = c/c_{cr}$.

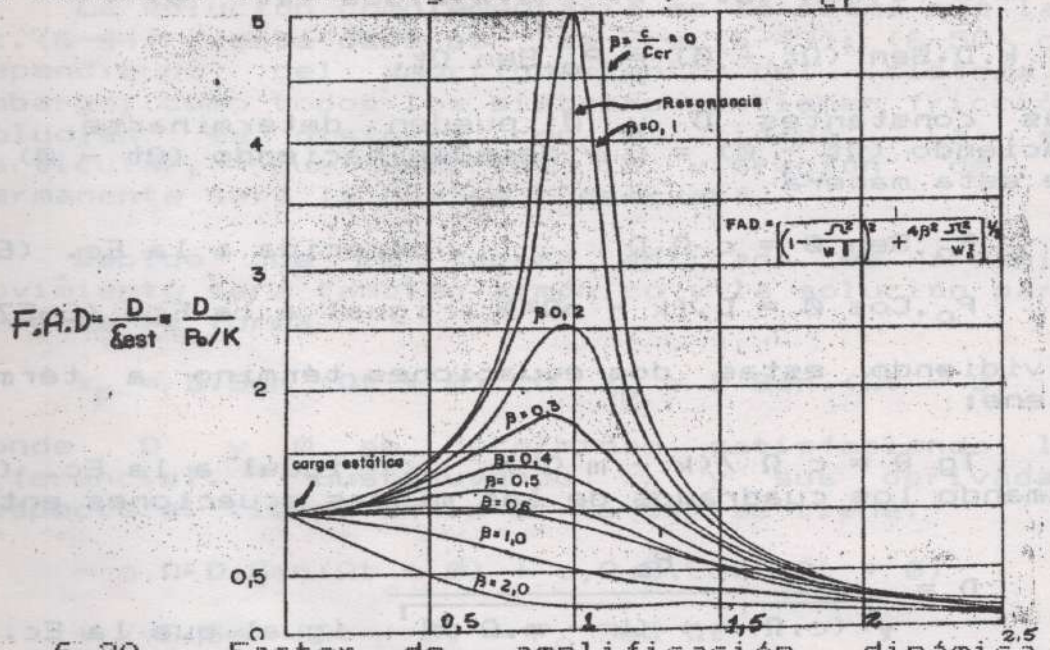


Fig. 6.20 Factor de amplificación dinámica en vibraciones forzadas amortiguadas (diagrama de amplitud - frecuencia).

Casos interesantes de la Fig. 6.20.

a) Si $\Omega = 0$, entonces $\frac{\Omega}{w_n} = 0$; F.A.D = 1 y $\frac{D}{P_o/k} = 1$

es independiente del amortiguamiento y depende solo de la carga estática.

b) Cuando $\Omega = w_n$; F.A.D se hace muy grande, el coeficiente de amortiguamiento viscoso c, es bajo, obteniendose la resonancia.

c) Si Ω/w_n tiende a infinito entonces $\Omega >> w_n$ y F.A.D tiende a cero. o sea que para mantener a F.A.D pequeña, hay que escoger un coeficiente de amortiguamiento viscoso c grande o que la separación entre w_n y Ω sea grande.

d) Un caso especial es cuando no existe amortiguamiento o sea $\beta = c/c_{cr} = 0$. Entonces la Ec. (6-62) se reduce a

$$F.A.D = \frac{1}{(1 - \Omega^2/w^2_n)}$$

haciéndose este valor infinito cuando $\Omega/w_n \dashrightarrow 1$. Pero como en realidad todos los sistemas tienen amortiguamiento, nunca se llegará a infinito.

Para el caso c, si se quiere encontrar la razón de frecuencias Ω/w_n para el cual la amplitud de la vibración es máxima, se deriva la Ec. (6-62) de la forma

$$\frac{D}{\delta_{est}} = \frac{1}{[(1-\Omega^2/w^2_n) + (2.\beta.\Omega/w_n)^2]^{1/2}}$$

haciendo igual a cero la derivada con respecto a (Ω/w_n) del cuadrado del denominador. Así:

$$2\,[\,1 - (\Omega/w_n)^2\,].[-2.(\Omega/w_n)] + 8.\beta^2.(\Omega/w_n) = 0$$

ordenando término a término se tiene:

$$4\,(\Omega/w_n).[\,(\Omega/w_n)^2 - 1 + \beta^2\,] = 0 \qquad \text{de aquí}$$

$$(\Omega/w_n)^2 = 1 - 2\,\beta^2 \qquad y$$

$$(\Omega/w_n) = \sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - 2.(c/c_{cr})^2} \qquad (6\text{-}63)$$

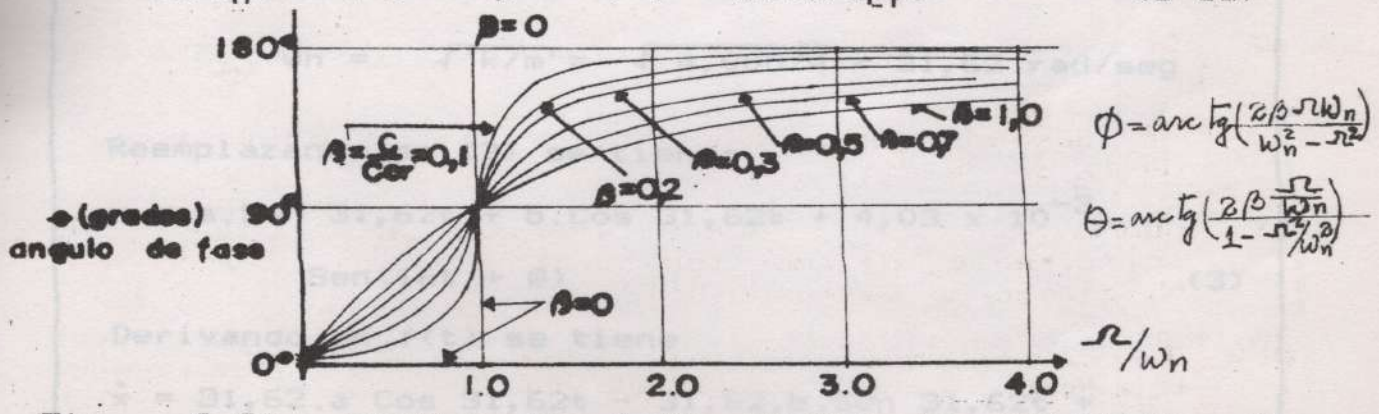
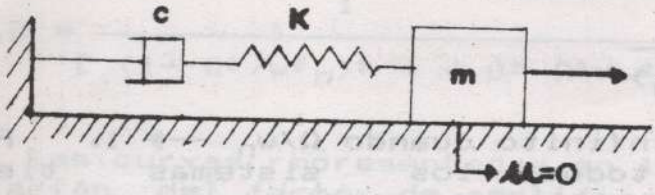


Fig. 6.21 Angulo de fase contra la relación de frecuencias para diferentes valores de relación de amortiguamiento.

Ejemplo 6.14



Un cuerpo de masa 20 Kgs es sacudido por una fuerza P = 30 Sen 40t New. La constante del resorte es k = 500 New/m y el coeficiente de amortiguamiento c = 10 New x seg/m.

Determine la amplitud de la vibración del estado permanente.

Solución

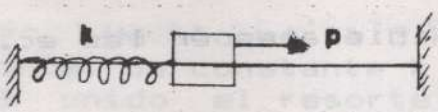
La solución particular, x_p del estado permanente es $x_p = D.Sen\ (\Omega t + \phi)$

La amplitud max es $D = \dfrac{P_o}{\sqrt{(c\ \Omega)^2 + (k - m\Omega^2)^2}}$ Ec. (6-59)

De los datos del problema se tiene: $P_o = 30$ New; $\Omega = 40$ rad/seg. k, c y m; por lo tanto

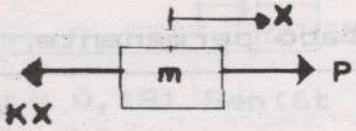
$$D = \frac{30}{\sqrt{(10 \times 40)^2 + (500 - 20 \times 40^2)^2}} = 9{,}52 \times 10^{-4}\ m$$

D = 0,95 m.m



Ejemplo 6.15

Un bloque de masa 4 Kgs está restringido por un resorte cuya constante k = 4 KN/m. La fuerza externa P = 12 Sen 16t. Para t = 0, el bloque está en la posición de equilibrio estático y tiene una velocidad de 4 m/seg hacia la izquierda. Escriba la ecuación general del movimiento que contiene a los estados transitorio y permanente.



Solución:

$x_o = 0 \quad \dot{x}_o = 4$ m/seg en t = 0

$+\rightarrow \Sigma F_x = m\ddot{x} \qquad P_o = 12$New

$P - kx = m\ddot{x} \qquad \Omega = 16$ rad/sg

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 12 \,.\, \text{Sen } 16t \qquad (1)$$

La solución general de la Ec. (1) es:

$$x = x_c + x_p = a.\text{Sen } w_n t + b.\text{Cos } w_n t + D.\text{Sen}(\Omega t + \emptyset) \qquad (2)$$

en donde:

$$D = \frac{P_o}{[\,(c\,\Omega)^2 + (k - m\,\Omega^2)^2\,]^{1/2}} \qquad \text{Ec. (6-59)}$$

$$D = \frac{12}{(\,4.000 - 4 \times (16)^2)} = 4{,}03 \times 10^{-3} \text{m}$$

$$wn = \sqrt{k/m} = \sqrt{4.000/4} = 31{,}62 \text{ rad/seg}$$

Reemplazando en (2) se tiene:

$$x = a.\text{Sen } 31{,}62t + b.\text{Cos } 31{,}62t + 4{,}03 \times 10^{-3}\,.$$

$$\text{Sen}(16t + \emptyset) \qquad (3)$$

Derivando en f(t) se tiene

$$\dot{x} = 31{,}62.a \text{ Cos } 31{,}62t - 31{,}62.b.\text{Sen } 31{,}62t +$$

$$16\,(4{,}03 \times 10^{-3}) \text{ Cos } (16t + \emptyset) \qquad (4)$$

Continuación Ejemplo 6.15

Utilizando las condiciones iniciales en las ec. (3) y (4) se tiene:

$$0 = 0 + b + 0 \quad ; \quad b = 0$$

$$-4 = 31{,}62a - 0 + 16 \times 4{,}03 \times 10^{-3} \quad ; \quad a = -0{,}1285$$

$$\text{Tg } \phi = \frac{c.\Omega}{(k - m\,\Omega^2)} = 0 \quad ; \qquad \phi = 0°$$

Por lo tanto

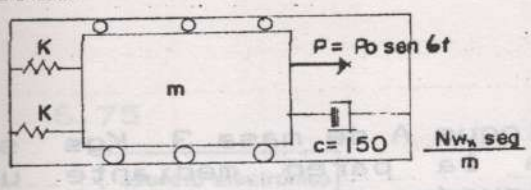
$$x = \underbrace{-\,0{,}1285.\text{Sen } 31{,}62t}_{\text{Estado transitorio}} + \underbrace{4{,}03 \times 10^{-3}.\text{Sen } 16t}_{\text{Estado permanente}}$$

Problemas/Sec. (6.10)

6.67 Un bloque de 3 Kgs de masa está sostenido por un resorte de constante k = 350 New/m. Al soporte al cual está unido el resorte se le da un movimiento armónico simple, expresado por d = (10 Sen2t)m.m. Si el factor de amortiguamiento es c/c_{cr} = 0,8, determine el ángulo de fase Ø de la vibración forzada.

R: Ø = 17,06°

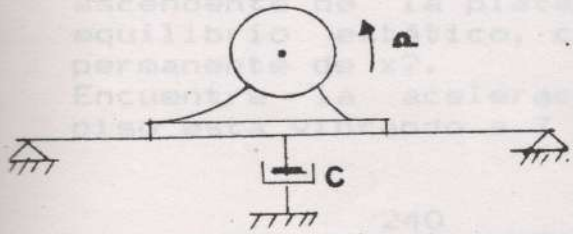
6.68



Un bloque de 10 Kgs está sometido a la acción de una fuerza armónica P = (200.Sen6t) New, cual es la ecuación que describe el movimiento del estado permanente? k= 500 New/m

R: x_p = 0,181.Sen(6t −54,58°)m

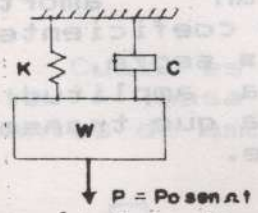
6.69



Un motor de 40 Kgs de masa está unido al punto medio de una viga articulada de masa despreciable. La viga se flexiona 40 m.m cuando el motor esta apagado. Si el motor hace girar un volante excéntrico equivalente a una masa desbalanceada de 5 Kgs situada a 100 m.m del eje de rotación, determine la amplitud de vibración del estado permanente cuando el motor gira a Ω = 25 rad/seg. β= c/c_{cr}= 0,20.

R: D = 0,01899 m.m = 18,99 m.m

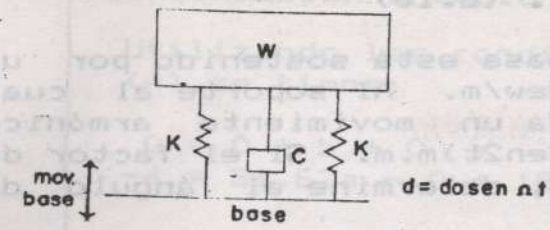
6.70



Un bloque de 50 Newtons de peso está sostenido por un resorte constante k = 3KN/m actuando en paralelo con un amortiguador de coeficiente c = 50 New x seg/m Sobre el bloque actúa una fuerza periódica P = 10 Sen 20t. Calcule la amplitud de vibración del bloque.

R: D = 41,66 m.m

6.71

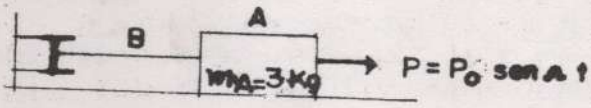


Un martinente se modela como un bloque de 1 KN de peso sobre dos resortes de constante k = 8KN/m y un coeficiente de amortiguamiento viscoso c = 500 New ∎ seg/m
El desplazamiento máximo de la base es do = 1,5 m.m cuando el aparato es operado en 10 ciclos/seg.

Determine la amplitud de vibración del bloque.

R: D = 0,98 m.m

6.72

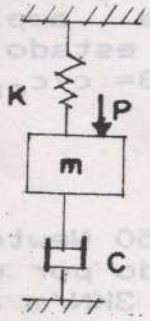


El bloque A de masa 3 Kgs se une a la pared mediante un amortiguador cuyo coeficiente c = 20 N ∎ Seg/m
Si P = 10 . Sen 10t (New), encuentre la amplitud del movimiento de A y la fuerza máxima que desarrolla el miembro B para el estado permanente.

R: D = 28 m.m

P_{max} = 5,6 New.

6.73



Un cuerpo de masa 40 Kgs está sostenida por un resorte de constante k = 10 KN/m sobre el que actúa una fuerza de sacudimiento P= 20·Sen30t (New)
El cuerpo se une al piso mediante un amortiguador viscoso cuyo coeficiente c = 1.000 N ∎ seg/m.
Encuentre la amplitud y la fuerza máxima que transmite el amortiguador, para el estado permanente.

R: D = 0,50 m.m

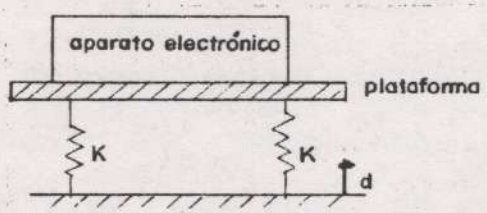
P_{max} = 15,12 New.

6.74 Si en el problema del ejemplo 6.14 la fuerza externa fuera una combinación de dos armónicas dada por P = 12(Sen 8t + Sen 16t). Escriba la ecuación general del movimiento que contiene a los estados transitorio y permanente.

R: $x = \underbrace{(-0,1294.\text{Sen } 31,62t +}_{\text{Estado transitorio}}$

$\underbrace{3,21 \blacksquare 10^{-3}.\text{Sen } 8t + 4,03 \blacksquare 10^{-3}.\text{Sen } 16t)m}_{\text{Estado permanente.}}$

6.75



Un aparato electrónico se coloca sobre una plataforma, soportada por cuatro resortes de constante k = 12 KN/m, con la finalidad de aislarlo del movimiento vibratorio del piso. La masa del aparato mas la plataforma es de 30 Kgs. La expresión del desplazamiento ascedente del piso es d = 0,005 Sen Ωt (m). Si se designa por x el desplazamiento ascendente de la plataforma a partir de la posición de equilibrio estático, cual será la expresión del estado permanente de x?.
Encuentre la aceleración máxima del aparato cuando el piso está vibrando a 7 Hz.

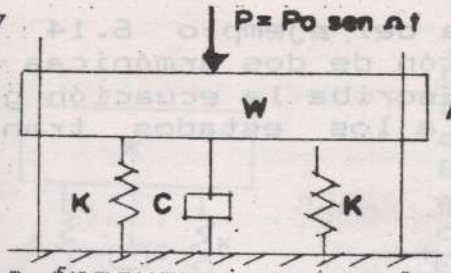
R: $D = \dfrac{240}{(48 \blacksquare 10^{3} - 30.\Omega^{2})}$

$a_{max} = 46,30.\text{m/seg}^2.$

6.76 Cual es la relación del período de un sistema resorte - masa sin amortiguamiento a un sistema de constantes de amortiguamiento $c = (\frac{1}{2})c_{cr}$.

R: $\dfrac{\tau}{\tau d} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6.77



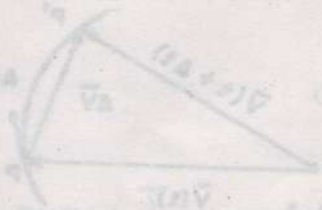
Un cuerpo A de 1 KN de peso está sostenido por dos resortes, cada uno de constante k= 50 KN/m y sometido a una fuerza periódica de magnitud igual a 625 New. Si el coeficiente de amortiguamiento es 2 KN ∎ seg/m encuentre:

a) La frecuencia circular natural en r.p.m del cuerpo si no existiera amortiguamiento

b) La frecuencia (Ω) en r.p.m de la fuerza periódica correspondiente al valor máximo del factor de amplificación suponiendo amortiguamiento.

R: a) w_n = 299,04 r.p.m

b) Ω = 268,28 r.p.m.



APENDICES

Apéndice A

A.1. Derivadas de las funciones vectoriales

Una función que transforma escalares en vectores se denomina función vectorial. Se denota como $\bar{V}$ que puede ser función del parámetro escalar tiempo t o del parámetro escalar, longitud de arco s. Así tendremos $\bar{V}(t)$ o $\bar{V}(s)$ vector variable que cambia en magnitud, en dirección o ambas simúltaneamente, cuando t cambia.

Derivada de una función vectorial. Sea $\bar{V}$ una función vectorial de t. El límite

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{V}(t + \Delta t) - \bar{V}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \dot{\bar{V}} \qquad (A-1)$$

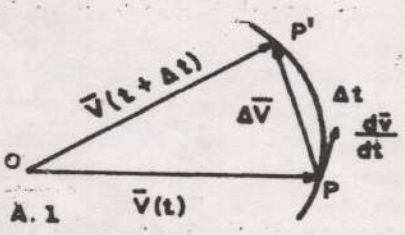


Fig. A.1

se denomina derivada de $\bar{V}$ en t. Este vector derivado es tangente a la indicatriz, Fig. A.1, siendo ésta la curva alabeada que contiene los extremos de todos los vectores $\bar{V}(t)$.

Si un vector cualquiera tiene magnitud y dirección constantes (Vector constante) su derivada es cero.
Si $\bar{A}$ y $\bar{V}$ son funciones vectoriales derivables y f una función escalar derivable, todas funciones de t, se tiene:

$$d(f\bar{A}) = (df/dt)\bar{A} + f \cdot d\bar{A}/dt \qquad (A-2)$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{A} + \bar{V}) = d\bar{A}/dt + d\bar{V}/dt \qquad (A-3)$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{A}.\bar{V}) = (d\bar{A}/dt).\bar{V} + \bar{A}.d\bar{V}/dt \qquad (A-4)$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{A} \times \bar{V}) = d\bar{A} \times \bar{V} + \bar{A} \times d\bar{V}/dt \qquad (A-5)$$

Hay que tener en cuenta que el producto vectorial no es conmutativo.
Sea $\bar{A}$ un vector cualquiera variable en magnitud y dirección, función de t, Fig. A.2 escrito como $\bar{A} = A.\bar{\lambda}_A$ donde A es la magnitud del vector y $\bar{\lambda}_A$ es un vector unitario en la dirección de $\bar{A}$.

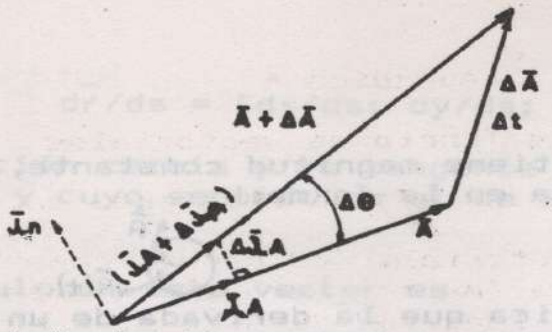


Fig. A.2 Derivada de un vector cualquiera.

Utilizando la Ec. (A-2) para la derivada de $\bar{A} = A.\bar{\lambda}_A$ se tiene

$$\dot{\bar{A}} = d\bar{A}/dt = \frac{d}{dt}\left(A.\bar{\lambda}_A \right) = \dot{A}.\bar{\lambda}_A + A.\dot{\bar{\lambda}}_A \qquad (A-6)$$

pero

$$\dot{\bar{\lambda}}_A = \frac{d}{dt}\left(\bar{\lambda}_A\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\bar{\lambda}_A + \Delta\bar{\lambda}_A - \bar{\lambda}_A}{\Delta t}\right]$$

$$\dot{\bar{\lambda}}_A = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Delta\bar{\lambda}_A}{\Delta t}\right] \qquad (A-7)$$

además $|\Delta\bar{\lambda}_A| = |\bar{\lambda}_A|.\Delta\theta = \Delta\theta$; ya que $|\bar{\lambda}_A| = 1$.

como $\Delta\bar{\lambda}_A$ es perpendicular a $\bar{\lambda}_A$ en el límite entonces

$$\dot{\bar{\lambda}}_A = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right].\bar{\lambda}_n = \dot{\theta}\,\bar{\lambda}_n \qquad (A-8)$$

En función de la velocidad angular instantánea del vector $\bar{A}$ se obtiene

$$\dot{\bar{\lambda}}_A = \dot{\theta}\,\bar{\lambda}_A = \bar{w}_A \times \bar{\lambda}_A \qquad (A-9)$$

Reemplazando la Ec. (A-9) en la Ec. (A-6) se tiene

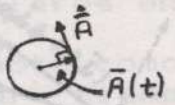
$$\dot{\bar{A}} = \dot{A}\,\bar{\lambda}_A + \bar{w}_A \times A\,\bar{\lambda}_A = \dot{A}\,\bar{\lambda}_A + \bar{w}_A \times \bar{A} \qquad (A-10)$$

En donde la primera parte de la Ec. (A-10) significa variación en la magnitud y la segunda parte variación en la dirección, de dicho vector.

Casos especiales.

a) Si el vector $\bar{A}$ tiene magnitud constante, $\dot{A} = 0$, la Ec. (A-10) queda en la forma:

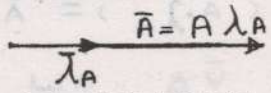
$$d\bar{A}/dt = \bar{w}_A \times \bar{A} \qquad \text{(A-11)}$$



lo cual significa que la derivada de un vector de magnitud constante y dirección variable es otro vector perpendicular a él.

b) Si el vector $\bar{A}$ tiene dirección constante $w_A = 0$. la Ec. (A-10) queda en la forma

$$d\bar{A}/dt = \dot{A}\,\bar{\lambda}_A \qquad \text{(A-12)}$$



lo cual significa que la derivada de un vector de dirección constante y magnitud variable es un vector paralelo a él.

A.2 Elementos de geometría diferencial Vector de posición en función de s, curvatura y radio de curvatura

Sea una curva alabeada cualquiera. La posición de una partícula queda determinada también por la distancia s medida sobre la trayectoria a partir de un punto fijo de referencia Fig. A.3.

$$\bar{r} = \bar{r}(s) = x(s)\bar{i} + y(s)\bar{j} + z(s)\bar{k} \qquad \text{(A-13)}$$

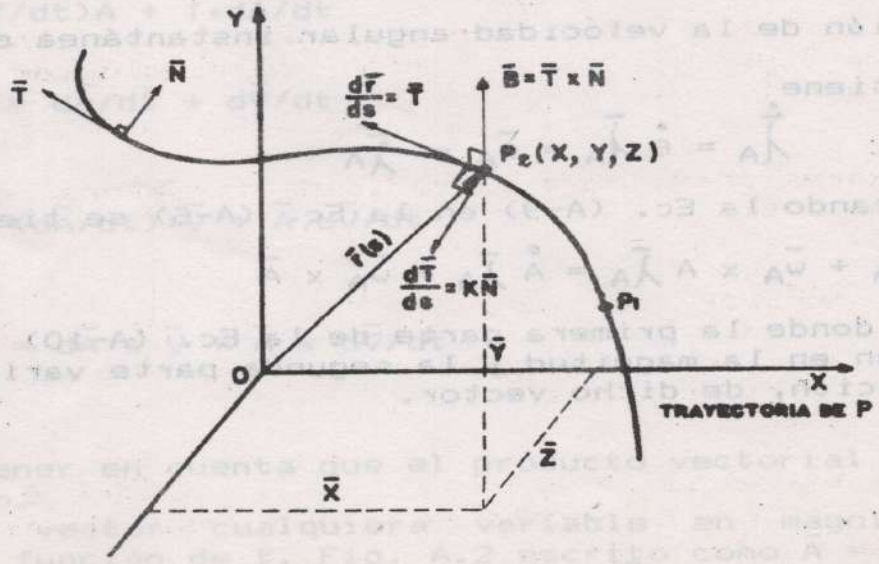


Fig. A.3. Vectores unitarios en el movimiento curvilíneo.

$$\bar{dr}/ds = [dx/ds;\ dy/ds;\ dz/ds] \qquad (A-14)$$

cuya dirección cambia y es tangente a la curva alabeada en el punto y cuyo sentido es el de incremento de s.

El módulo de este vector es

$$\left| \frac{\bar{dr}}{ds} \right| = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{ds^2}} = \frac{ds}{ds} = 1$$

así, $\bar{dr}/ds$ es un vector unitario, tangente a la curva, con sentido del incremento de s y designado por $\bar{T}$.

$$\bar{dr}/ds = \bar{T} \qquad (A-15)$$

$\bar{T}$ es un vector de magnitud constante y dirección variable y de acuerdo a la Ec. (A-11), su derivada $d\bar{T}/ds$ es otro vector perpendicular a él e igual a

$$d\bar{T}/ds = k.\bar{N} \qquad (A-16)$$

en la cual $\bar{N}$ es un vector unitario con la misma dirección que $d\bar{T}/ds$ y dirigido hacia el centro de curvatura, llamado normal principal a la curva, y $k = |\ d\bar{T}/ds\ |$ la curvatura de la curva en el punto dado, que es una medida de la variación de $\bar{T}$ cuando s varía.
Al inverso de la curvatura se le llama radio de curvatura y se simboliza por $\rho = 1/k$.

El vector $\bar{B}$ definido por el producto vectorial $\bar{T} \times \bar{N}$ se llama binormal, es unitario y perpendicular al plano formado por $\bar{T}$ y $\bar{N}$.

A.3 Expresiones para el radio de curvatura de curvas planas

a) En función de $\bar{v}$ y $\bar{a}$.
Un método general para encontrar ρ en cualquier sistema de coordenadas es tomar el producto vectorial de $\bar{v} \times \bar{a}$, así:

$$\bar{v} \times \bar{a} = \bar{v} \times [\bar{a}_t + \bar{a}_n] = \bar{v} \times \bar{a}_t + \bar{v} \times \bar{a}_n = 0 + \bar{v} \times \bar{a}_n$$

por ser $\bar{v}$ y $\bar{a}_t$, vectores colineales. Además

$$|\ \bar{v} \times \bar{a}\ | = |\ \bar{v} \times \bar{a}_n\ | \ \text{y} \ |\ \bar{v} \times a_n\ | = v.a_n = v\left(\frac{v^2}{\rho}\right)$$

$$|\bar{v} \times \bar{a}_n| = v^3/\rho \qquad \text{entonces}$$

$$\rho = \frac{|\bar{v}|^3}{|\bar{v} \times \bar{a}|} = \frac{|\dot{\bar{r}}|^3}{|\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}}|} \qquad (A-17)$$

b) En función de $\bar{r}$ y s.

Se sabe que $\bar{v} = v\bar{T}$; $d\bar{T}/ds = k\bar{N} = (1/\rho)\cdot N$ y $d\bar{r}/ds = \bar{T}$, realizando la segunda derivada de este último se tiene

$$d^2\bar{r}/ds^2 = d\bar{T}/ds = (1/\rho).\bar{N}.$$

y tomando el módulo a ambos lados de esa igualdad, queda

$$1/\rho = |d^2\bar{r}/ds^2| \quad \text{o sea} \quad \rho = 1/|d^2r/ds^2| \qquad (A-18)$$

c) En función de y' y y''
Si la ecuación de la curva plana está dada en coordenadas cartesianas:

Fig. A.4.

y = f(x) entonces

$d\theta/ds = 1/\rho$; $tg\theta = dy/dx$, Fig. A.4, derivando en f(x)

$\sec^2\theta\,(d\theta/dx) = d^2y/dx^2$ como $\sec^2\theta = 1 + tg^2\theta$ entonces

$$d\theta/dx = \frac{d^2y/dx^2}{[1+(dy/dx)^2]} = (d\theta/ds).(ds/dx) \text{ pero } ds^2 = dx^2 + dy^2;$$

y $ds/dx = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}$ reemplazando, se tiene

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y/dx^2}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}} \qquad \text{finalmente}$$

$$\rho = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{|y''|} \qquad (A-19)$$

d) En función de $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{y}$.

Sea la curva plana definida por

$x = x_{(t)}$; $y = y_{(t)} \Rightarrow \bar{r} = [x; y]$; $\dot{\bar{r}} = [\dot{x}, \dot{y}]$; $\ddot{\bar{r}} = [\ddot{x}, \ddot{y}]$

reemplazando y realizando operaciones en Ec. (A-17) se tiene:

$d\theta/ds = 1/\rho$; $tg\theta = dy/dx = (dy/dt)/dx/dt$ derivando en f(t).

$$\sec^2\theta.(d\theta/dt) = \frac{(d^2y/dt^2)(dx/dt) - (d^2x/dt^2)(dy/dt)}{(dx/dt)^2}$$

pero $\sec^2\theta = 1 + (dy/dt)^2/(dx/dt)^2$ entonces

$$d\theta/dt = \frac{(d^2y/dt^2)(dx/dt) - (d^2x/dt^2)(dy/dt)}{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2} =$$

$$(d\theta/ds).(ds/dt) = (1/\rho)\sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}$$

Reemplazando se tiene

$$1/\rho = \frac{(d^2y/dt^2)(dx/dt) - (d^2y/dt^2)(dy/dt)}{[(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2]^{3/2}}$$

y finalmente

$$\rho = \frac{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{y}\dot{x}|} \qquad \text{(A-20)}$$

e) En función de r, $r' = dr/d\theta$ y $r'' = d^2r/d\theta^2$

Sea la ecuación de la curva plana dada en coordenadas polares, $r = f(\theta)$ con $\bar{i}_r$ e $\bar{i}_\theta$ vectores unitarios en la dirección radial y transversal, Fig. A.5.

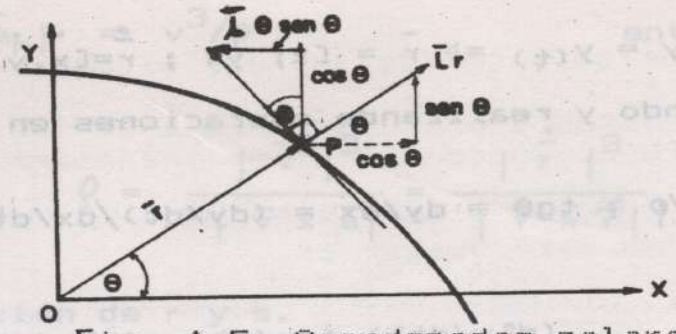


Fig. A.5 Coordenadas polares.

$$\bar{r} = r.\bar{i}_r \quad y \quad \bar{r}' = d\bar{r}/d\theta = r'.\bar{i}_r + r(d\bar{i}r/d\theta) = r'\bar{i}_r + r\bar{i}_\theta$$

y la segunda derivada es

$$\bar{r}'' = d^2r/d\theta^2 = r''\bar{i}_r + r'\bar{i}_\theta + r'\bar{i}_\theta - r\bar{i}_r = (r''-r)\bar{i}_r + 2r'\bar{i}_\theta$$

reemplazando en la Ec. (A-17); análogamente se tiene:

$$\begin{vmatrix} \bar{i}_r & \bar{i}_\theta & \bar{k} \\ r' & r & 0 \\ (r''-r) & 2r' & 0 \end{vmatrix} = [0;\ 0;\ \{r^2+2(r')^2-r.r''\}]$$

$$\rho = \frac{[\,r^2 + (r')^2\,]^{3/2}}{|\,r^2 + 2(r')^2 - r.r''\,|} \qquad (A-21)$$

A.4 Elementos de geometría analítica

Diferencia entre coeficiente angular y pendiente:

a) En ejes oblicuos

b) En ejes ortogonales

a) Sean los puntos $P_1\ (x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ tomados respecto a ejes oblicuos xy, formando angulo $\phi = 0°$. Utilicemos el punto $P_3\ (x_2, y_1)$ Fig. A.6 como elemento para la demostración.

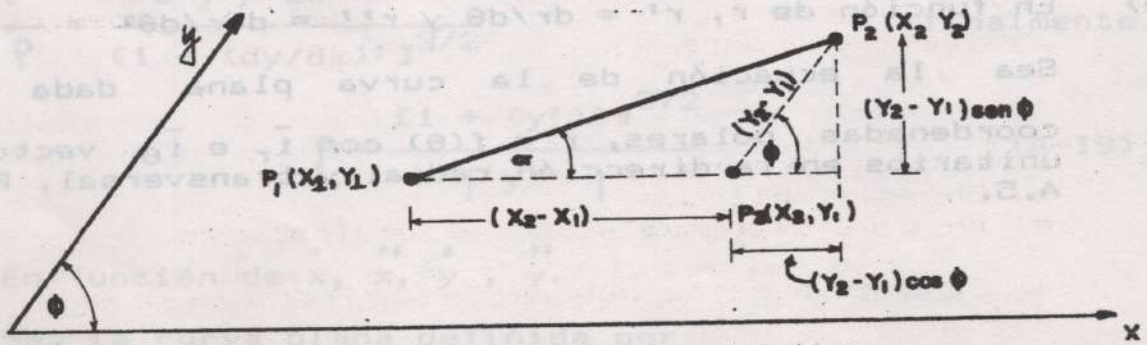


Fig. A.6 Sistema de coordenadas oblicuas.

Llamemos $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, el coeficiente angular y tangente de α, la pendiente.

En la Fig. A.6 $Tg\alpha = \dfrac{(y_2 - y_1)\ sen\phi}{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)\cos\phi}$, dividiendo por $(x_2 - x_1)$ tanto el numerador como el denominador, de la parte derecha de la igualdad resulta,

$$Tg\alpha = \frac{\left(\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) \cdot sen\ \phi}{1 + \left(\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)\cos\phi} = \frac{m\ sen\ \phi}{(1 + m\cos\phi)} \qquad (A-22)$$

Por lo tanto el coeficiente angular es diferente de la pendiente en ejes oblicuos.

b) Si $\phi = 90°$, ejes ortogonales, entonces la Ec. (A-22) se convierte en

$$Tg\alpha = m.(1)/[1 + m(0)] = m \qquad (A-23)$$

por lo tanto la pendiente es igual al coeficiente angular sólo para ejes ortogonales.

A.5 Condición de ortogonalidad:

a) En ejes oblicuos

b) En ejes ortogonales o perpendiculares

a) El ángulo entre dos rectas, siendo $\alpha_1 > \alpha_2$, está dado por

$$Tg\ (\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{Tg\alpha_1 - Tg\alpha_2}{(1 + Tg\alpha_1 \cdot Tg\alpha_2)}$$

reemplazando en función del coeficiente angular la ecuación anterior se tiene

$$Tg\ (\alpha_1-\alpha_2)= \frac{\dfrac{m_1 sen\emptyset}{1+m_1 cos\emptyset} - \dfrac{m_2 sen\emptyset}{1+m_2 sen\emptyset}}{1+\dfrac{m_1 m_2 sen^2\emptyset}{(1+m_1 cos\emptyset)(1+m_2 cos\emptyset)}}$$

para la ortogonalidad se debe cumplir que $Tg(\alpha_1-\alpha_2) = Tg\ 90° = \infty$ entonces

$$1 + \frac{m_1 m_2 sen^2 \emptyset}{[\ 1 + (m_1+m_2)cos\emptyset + m_1 m_2 cos^2\emptyset)\ ]} = 0 \text{ ; o sea que}$$

$$(m_1 + m_2)cos\emptyset + m_1 m_2 + 1 = 0 \qquad (A-24)$$

condición de ortogonalidad en ejes oblicuos.

b) Si $\emptyset = 90°$ entonces $cos\ 90° = 0$, resultando de la Ec. (A-24), la conocida expresión $m_1 . m_2 = -1$ condición de ortogonalidad en ejes x - y; que forman entre si 90°.

A.6 Expresión de la serie de Maclaurin

Sea A un número real y $\{A_n\}$ una sucesión. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n (x-A)^n = Ao + A_1(x-A) + A_2(x-A)^2 + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ A_n (x-A)^n \qquad (A-25)$$

se llama serie de potencias en (x-A). Si A=0, se obtiene una serie de potencias en x.

$$\sum_{n=0}^{\infty} An\ x^n = Ao + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + Anx^n + \cdots \qquad (A-26)$$

conocida también con el nombre de serie de Maclaurin.
Una serie de potencias puede ser convergente para ciertos valores de x y divergente para otros valores de x.
Una serie de potencia puede ser derivada término a término.
La serie de Maclaurin nos dá la función desarrollada en forma potencial, figurando como coeficiente de

las diversas potencias de x las correspondientes derivadas de la función dadas para el valor particular de x = 0.

Sea la igualdad hipotética

$$f(x) = A_o + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots + A_nx^n \quad (A\text{-}26')$$

las derivadas sucesivas de esta serie de potencia son

$$f'(x) = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \ldots\ldots + nA_nx^{n-1} + \ldots$$

$$f''(x) = 2A_2 + 3.2A_3x + \ldots\ldots n(n-1)x^{n-2}$$

$$f'''(x) = 3.2\,A_3 + \ldots\ldots\ldots + n(n-1)(n-2).x^{n-3}$$

$$0! = 1; \quad 2! = 1 \cdot 2; \quad 3! = 1.2.3; \quad 4! = 1.2.3.4$$

$$f^{(n)}(x) = n!.A_n + (n+1)!(A_{n+1})x + \ldots\ldots\ldots$$

Si se hace x = 0, entonces

$$f(0) = A_o \; ; \; f'(0) = A_1; \; f''(0) = 2!A_2; \; f'''(0) = 3!A_3;$$

$$f^n(0) = n!.An$$

Sustituyendo los coeficiente deducidos en la Ec. (A-26') resulta la célebre serie de Maclaurin.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0).x}{1!} + \frac{f''(0).x^2}{2!} + \ldots + \frac{f^n(0).x^n}{n!}$$

El argumento sirve para todo n.
Si f'(0), f''(0) ... se hacen infinitas o indeterminadas, no se puede aplicar la serie.

Ejemplos.

Desarrolle en serie:

a) $(1 + x)^n$

b) e^x

c) Ln (1 + x)

d) cos x

e) sen x

Solución:

a) $f(x) = (1 + x)^n$ $\quad f(0) = 1$

$f'(x) = n(1 + x)^{n-1}$ $\quad f'(0) = n$

$f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$ $\quad f''(0) = n(n-1)$

$f'''(x) = n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}$ $\quad f'''(0) = n(n-1)(n-2)$

entonces

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1).x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2).x^3}{3!} \qquad \text{(A-27)}$$

si x es pequeño

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx$$

b) $f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

$f''(x) = e^x$

$f'''(x) = e^x$

Todas las derivadas de e^x son de nuevo e^x. En $x=0$ todas ellas valen 1. Entonces la serie de Maclaurin sería.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad \text{(A-28)}$$

si x es pequeño.

$$e_x \approx 1 + x$$

c) $f(x) = \text{Ln}\,(1 + x)$ $\quad f(0) = 0$

$f'(x) = (1 + x)^{-1}$ $\quad f'(0) = 1$

$f''(x) = -(1 + x)^{-2}$ $\quad f''(0) = -1$

$f'''(x) = 2(1 + x)^{-3}$ $\quad f'''(0) = 2$

$f^{IV} = -6\,(1 + x)^{-4}$ $\quad f^{IV}(0) = -6$

entonces

$$\text{Ln } (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots \quad \text{(A-29)}$$

si x es pequeño

$$\text{Ln } (1 + x) \approx x$$

d) $f(x) = \cos x$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = -\text{sen } x$ $\qquad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x$ $\qquad f''(0) = -1$

$f'''(x) = \text{sen } x$ $\qquad f'''(0) = 0$

$f^{IV}(x) = \cos x$ $\qquad f^{IV}(0) = 1$

$$\text{Cos } x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \quad \text{(A-30)}$$

si x es pequeña

$$\text{Cos } x \approx 1$$

e) $f(x) = \text{sen } x$ $\qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\text{sen } x$ $\qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x$ $\qquad f'''(0) = 1$

$f^{IV}(x) = \text{Sen } x$ $\qquad f^{IV}(0) = 0$

$$\text{Sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots\ldots \quad \text{(A-31)}$$

si x es pequeña

$$\text{Sen } x \approx x$$

APENDICE B

B.1 RESORTES INCLINADOS. ANALISIS SOBRE LA INFLUENCIA DEL CAMPO GRAVITATORIO

En la mayoría de los textos de vibraciones mecánicas, se omite frecuentemente la influencia de la gravedad en la ecuación de la frecuencia angular de cuerpos soportados por resortes inclinados. Por ejemplo en criterios de estabilidad es importante la influencia de g.

B.1.1. MOVIMIENTO VERTICAL DE UNA PLATAFORMA SUSPENDIDA POR CUATRO RESORTES INCLINADOS. Fig. B.1

Consideremos una plataforma pesada ABCD de masa M suspendida de un punto fijo O por cuatro resortes inclinados idénticos de constante k. Cuando el sistema está en equilibrio, la distancia entre el punto O y el centro E de la plataforma a lo largo de la vertical es h. La diagonal de la plataforma tiene una longitud d.

Nuestro objetivo es determinar la frecuencia angular de lá vibración vertical.

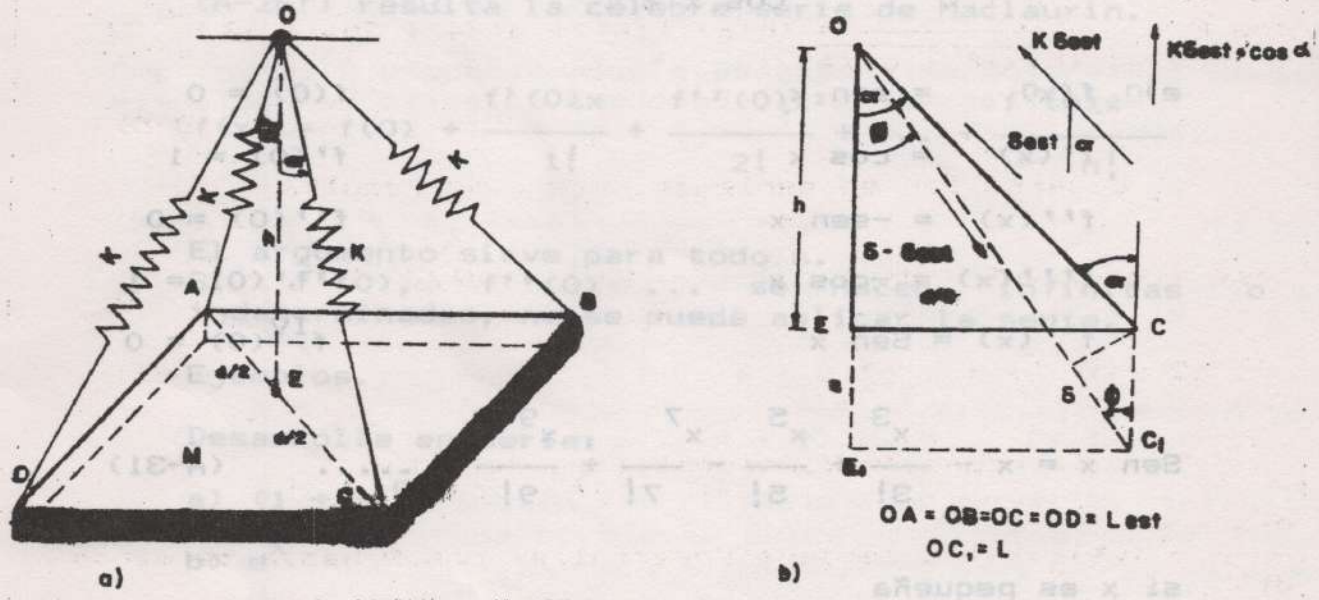


Fig. B.1. Plataforma de masa M suspendida de cuatro resortes.

En la posición de equilibrio cada resorte tiene una deflexión estática δ_{est}; según el triángulo OEC:

$$4k \cdot \delta_{est} \cdot \cos \alpha = Mg \quad \text{..... (B-1)}$$

Para el movimiento, según OE_1, C_1, se tiene:

$$Mg - 4k\ (\delta + \delta_{est}) \cos \emptyset = M \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \quad \text{..... (B-2)}$$

Obsérvese además qùe en la Fig. B.1.b.

$$\delta = x \cdot \cos \emptyset \quad \text{..... (B-3)}$$

Analizando las Ecs. (B-1) y (B-2) se ve la necesidad de especificar $\emptyset = f(\alpha)$, para ello definamos:

$$\cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + d^2/4}} \quad \text{..... (B-4)}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{d/2}{\sqrt{h^2 + d^2/4}} \quad \text{..... (B-5)}$$

$$\cos \emptyset = \frac{h + x}{\sqrt{(h+x)^2 + d^2/4}} = (h+x)\ [(h^2 + d^2/4) + 2hx + x^2]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{(B-6)}$$

Al desarrollar en serie de potencias resulta

$$\cos\emptyset = (h+x)[(h^2 + d^2/4)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(h^2 + d^2/4)^{-3/2} \cdot (2kx + x^2) + .. \ ]. \quad \text{(B-7)}$$

Como la ecuación fundamental es del tipo

$\frac{d^2 x}{dt^2} + (\omega^2)_n\ x = 0$ se debe desarrollar cos $\emptyset$ hasta términos de orden x.

Operando con la Ec. (B-7) se tiene:

$$\cos \phi = \frac{h}{\sqrt{h^2 + d^2/4}} + \frac{x}{\sqrt{h^2 + d^2/4}} - \frac{h^2 x}{(h^2+d^2/4)^{3/2}} \quad \text{.....(B-7')}$$

$$\cos \phi = \frac{h}{\sqrt{h^2+d^2/4}} + \frac{x}{\sqrt{h^2+d^2/4}} \left[1 - \frac{h^2}{(h^2+d^2/4)} \right] \quad \text{....(B-7'')}$$

$$\text{pero } \left(1 - \frac{h^2}{h^2+d^2/4}\right) = \frac{d^2/4}{h^2+d^2/4} = \text{sen}^2\ \alpha \quad \text{..... (B-8)}$$

reemplazando las Ecs. (B-4) y (B-8) en la Ec. (B-7'') se tiene:

$$\cos \phi = \cos \alpha + \frac{x}{h} \cos \alpha\ (\text{sen}^2 \alpha) = \cos \alpha \left[1 + \frac{x}{h} \text{sen}^2 \alpha\right] \quad \text{(B-9)}$$

Reemplazando la Ec. (B-9) en las ecuaciones (B-2) y (B-3) se tiene:

$$Mg - 4kx.\cos^2\alpha\ (1+ \frac{x}{h} \text{sen}^2\alpha)^2 - 4k\delta_{est}.\cos\alpha.(1+ \frac{x}{h} \text{sen}^2\alpha) =$$

$$= M.\frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{(B-10)}$$

Reemplazando la Ec. (B-1) en la Ec. (B-10) se tiene:

$$Mg - 4kx.\cos^2\alpha(1+ \frac{2x}{h} \text{sen}^2\alpha + \frac{x^2}{h^2} \text{sen}^2\alpha) - Mg - \frac{Mgx}{h} \text{sen}^2\alpha =$$

$$= M \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{(B-10')}$$

Despreciando los términos en x^2, x^3 .... entonces

$$- 4kx.\cos^2\alpha - \frac{Mg}{h}.x.\text{sen}^2\alpha = M \frac{d^2x}{dt^2} \text{ de la cual se obtiene:}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left[\frac{4k}{M}\cdot\cos^2\alpha + \left(\frac{g}{h}\right)\operatorname{sen}^2\alpha\right] x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(B-11)}$$

$$\text{entonces } \omega^2{}_n = \frac{4k.\cos^2\alpha}{M} + \frac{g.\operatorname{sen}^2\alpha}{h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(B-12)}$$

Análisis de las soluciones para diferentes posiciones y relaciones de este problema.

A) Cuando x/h es muy pequeño y los resortes estan muy cerca de la posición vertical.

$\cos \phi \approx \cos \alpha$, entonces la combinación de las Ecs. (B-1), (B-2) y (B-3) nos dá:

$$Mg - 4k.(x.\cos\alpha + \delta_{est}).\cos\alpha = M.\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$Mg - 4kx.\cos^2\alpha - Mg = M.\frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{entonces}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{4k}{M}\cdot\cos^2\alpha\right).x = 0 \quad y$$

$$\omega^2{}_n = \frac{4k.\cos^2\alpha}{M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(B-13)}$$

B) Cuando x/h es pequeño y los resortes estan cerca a la posición horizontal.

$$\cos \phi = \cos\alpha \left(1 + \frac{x}{h}\cdot\operatorname{sen}^2\alpha\right) \quad \text{entonces}$$

$$\omega^2{}_n = \frac{4k.\cos^2\alpha}{M} + \frac{g.\operatorname{sen}^2\alpha}{h}$$

es la mejor descripción.

C) Cuando x/h es relativamente grande, la solución es altamente compleja con características no lineales.

Es de notar en el caso B que cuando x/h es pequeño, pero no muy pequeño, el término $(g.sen^2\alpha)/h$ debe ser incluido en la expresión de w^2_n.

Este término es generalmente omitido en las soluciones de problemas semejantes en la literatura de la teoría de vibraciones. Entonces, como es posible que influya la gravedad en un resorte inclinado y no en otro completamente vertical donde la gravedad tira directamente?. La solución a este problema es definir por qué cambia la fuerza en un resorte en movimiento.

La fuerza en el resorte en movimiento cambia:

a) Por la elongación del resorte y
b) Por el cambio en la dirección del resorte.

Como ilustración, se resolverá este caso desde un punto de vista netamente físico.

Para un $d\beta$ muy pequeño:

a) Elongación del resorte $\delta = dx.\cos\alpha$ .Fig.B.2. (B-14)

El cambio en la fuerza del resorte es:

$$\Delta F = k\delta = k.(\cos\alpha).dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B-15)$$

La componente vertical de ΔF es

$$\Delta F_y = \Delta F.\cos\alpha = k.(\cos^2\alpha)dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B-16)$$

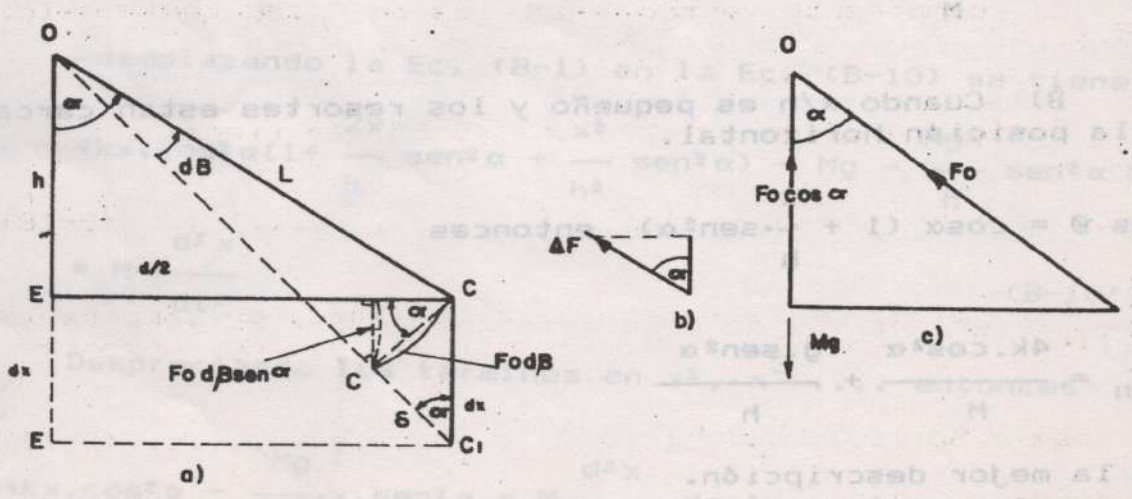
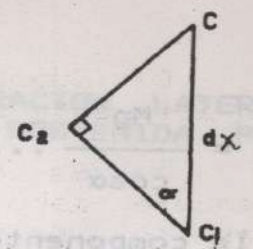


Fig. B.2.

b) Cambio en la dirección del resorte



CC_2 . visto desde C_1

$CC_2 = dx.\text{sen}\alpha$

El arco CC_2 visto desde O es $CC_2 = L.d\beta$ entonces

$$d\beta = \frac{CC_2}{L} = \frac{dx.\text{sen}\alpha}{L} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B-17)$$

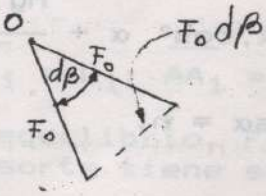
Si F_o es la fuerza estática de cada resorte (cuatro en este caso) su cambio debido al desplazamiento angular será:

$F_o.d\beta$ que es el cambio de F_o debido a $d\beta$.

NOTA: El arco es igual a la cuerda cuando $d\beta$ es pequeño entonces la cuerda sería

$$2F_o.\text{sen}\left(\frac{d\beta}{2}\right), \text{ pero sen } \left(\frac{d\beta}{2}\right) \approx \frac{d\beta}{2} \text{ así } 2F_o.\text{sen}\left(\frac{d\beta}{2}\right)$$

$$\text{es, } 2F_o \frac{d\beta}{2} \approx F_o\, d\beta.$$



La componente vertical de $F_o d\beta$ es $F_o.d\beta$ sen α Fig. B.2.a.

Reemplazando en ella la Ec. (B-17) se tiene:

$$F_o.d\beta.\text{sen}\alpha = F_o \left(\frac{dx.\text{sen}\alpha}{L}\right) \text{sen}\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B-18)$$

Pero si F_o es causada por la gravedad, su componente vertical $F_o.\cos\alpha$ debe contrarrestar el peso Mg, entonces

$$F_o \cos\alpha = Mg \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B-19)$$

en donde

$$F_o = \frac{Mg}{\cos\alpha} \quad \text{.....(B-19')}$$

y la componente vertical de $F_o.d\beta$ es:

$$F_o \cdot d\beta.\text{sen}\alpha = \frac{Mg}{\cos\alpha}\left(\frac{dx.\text{sen}^2\alpha}{L}\right) \quad \text{.....(B-20)}$$

que es el término correspondiente al cambio en la dirección del resorte.

La Fuerza total $(\Delta F)_T = 4.k\cos^2\alpha.dx + \frac{Mg.\text{sen}^2\alpha.dx}{L.\cos\alpha}$

suma de la Ec. (B-16) cuatro veces y la Ec. (B-20); dividida por dx dá

$k_{eq} = \frac{(\Delta F)_T}{dx}$ y reemplazando valores daría

$$k_{eq} = 4.k.\cos^2\alpha + \frac{Mg.\text{sen}^2\alpha}{h} \quad \text{.....(B-21)}$$

ya que $L.\cos\alpha = h$.

Como

$w^2_n = \frac{k_{eq}}{M}$ entonces

$$w^2_n = \frac{4k\cos^2\alpha}{M} + \frac{g\,\text{sen}^2\alpha}{h} \quad \text{.....(B-22)}$$

lo cual coincide con la solución anterior, Ec. (B-12) y clarifica la situación física.

En resortes inclinados influye la gravedad en la frecuencia natural de su movimiento vertical; solo para resortes duros cerrados a la posición vertical el primer término $(\frac{4k}{M})\cos^2\alpha$ es bastante aproximado.

B.1.2 FRECUENCIA NATURAL ANGULAR DE LA VIBRACION LATERAL DE UNA BARRA HORIZONTAL UNIFORME SOSTENIDA POR RESORTES INCLINADOS. Fig. B.3

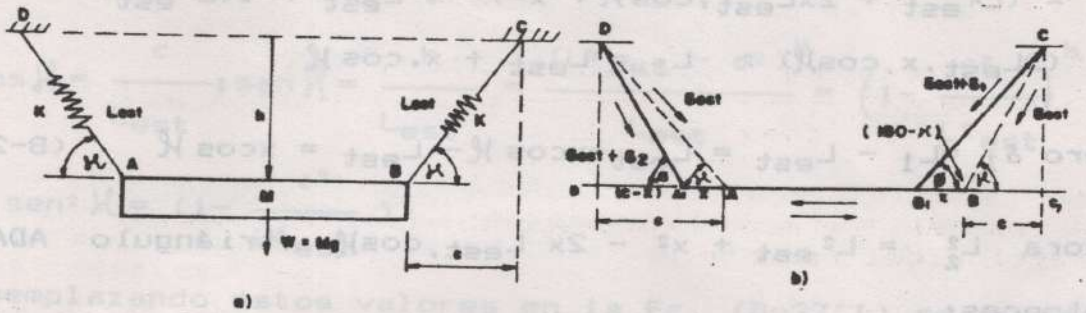
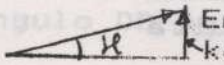


Fig. B.3. Barra horizontal uniforme sostenida por resortes inclinados.

De la Fig. B.3 se tiene:

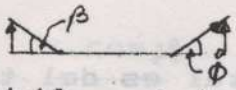
$$\overline{AD} = \overline{BC} = L_{est};\ \overline{DA_1} = L_2;\ \overline{CB_1} = L_1;\ \overline{AA_1} = \overline{BB_1} = x$$



En la posición de equilibrio, Fig. B.3.b, $k\delta_{est}\,\text{sen}\,\mathcal{H}$, cada resorte tiene su deflexión estática, entonces

$$2.k.\delta_{est}.\text{sen}\,\mathcal{H} = W = Mg \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B\text{-}23)$$

Para el movimiento lateral, izquierdo o derecho, o sea para la condición dinámica, se tiene:



$$k\,(\delta_{est} + \delta_2)\cos\beta - k(\delta_{est} + \delta_1)\cos\phi = M\cdot\frac{d^2x}{dt^2} \quad \ldots\ldots \quad (B\text{-}24)$$

pero en el triángulo BCB_1, Fig. B.3.b por el Teorema del Coseno, se tiene:

$$L^2_1 = L^2_{est} + x^2 - 2x.L_{est}\cos(180 - \mathcal{H}) = L^2_{est} + x^2 + 2x.L_{est}.\cos\mathcal{H} \quad y$$

$$L_1 = (L^2_{est} + 2xL_{est}.\cos\mathcal{H} + x^2)^{\frac{1}{2}} \approx L_{est} + \tfrac{1}{2}(L^2_{est})^{-\frac{1}{2}}(2L_{est}.x.\cos\mathcal{H}) \approx L_1 = L_{est} + x.\cos\mathcal{H}.$$

pero $\delta_1 = L_1 - L_{est} = L_{est} + x\cos\mathcal{H} - L_{est} = x\cos\mathcal{H}$ (B-25)

ahora $L_2^2 = L^2_{est} + x^2 - 2x\,L_{est}.\cos\mathcal{H}$, triángulo ADA_1, entonces:

$$L_2 = (L^2_{est} - 2x.L_{est}.\cos\mathcal{H} + x^2)^{\frac{1}{2}} = L_{est} - x.\cos\mathcal{H}$$

pero $\delta_2 = L_2 - L_{est} = L_{est} - x.\cos\mathcal{H} - L_{est} = -x.\cos\mathcal{H}$ (B-26)

Expresando cos Ø y cos β en función de x y $\mathcal{H}$, geométricamente, Fig. B.3.b, se tiene:

$$\cos Ø = \frac{c + x}{L_1} = \frac{c + x}{(L_{est} + x.\cos\mathcal{H})} = (c+x).(L_{est} + x.\cos\mathcal{H})^{-1} \qquad \text{(B-27)}$$

al desarrollar por serie de potencias resulta

$$\cos Ø \approx (c+x)\,[\,L_{est}^{-1} - 1(L_{est})^{-2}.x.\cos\mathcal{H}] \approx$$

$$\approx (c+x)\left(\frac{1}{L_{est}} - \frac{x.\cos\mathcal{H}}{L^2_{est}}\right) \qquad \text{(B-27')}$$

como la ecuación fundamental es del tipo $\frac{d^2x}{dt^2} + w^2_n.x = 0$ se debe desarrollar cosØ hasta términos de orden x.

Operando con la Ec. (B-27') se tiene:

$$\cos Ø = \frac{c}{L_{est}} + \frac{x}{L_{est}} - \frac{x.c.\cos\mathcal{H}}{L^2_{est}} - \frac{x^2\cos\mathcal{H}}{L^2_{est}}$$

$$\cos \phi = \frac{c}{L_{est}} + \frac{x}{L_{est}} \left(1 - \frac{c.\cos\mathcal{H}}{L_{est}}\right) \qquad \text{(B-27'')}$$

pero en el triángulo B.C.C' de la Fig. 4.3.b se tiene:

$$\cos\mathcal{H} = \frac{c}{L_{est}}; \operatorname{sen}\mathcal{H} = \frac{h}{L_{est}} = \frac{(L^2_{est} - c^2)^{1/2}}{L_{est}} = \left(1 - \frac{c^2}{L^2_{est}}\right)^{1/2}$$

$$y_1 \operatorname{sen}^2\mathcal{H} = \left(1 - \frac{c^2}{L^2_{est}}\right)$$

reemplazando éstos valores en la Ec. (B-27'') se tiene:

$$\cos\phi = \cos\mathcal{H} + \frac{c}{c/\cos} \cdot \left[1 - \frac{c.(c/L_{est})}{L_{est}}\right] =$$

$$= \cos\mathcal{H} + \frac{x}{c} \cdot \cos\mathcal{H}\left(1 - \frac{c^2}{L^2_{est}}\right) = \cos\mathcal{H}\left[1 + \frac{x}{c} \cdot \operatorname{sen}^2\mathcal{H}\right] \qquad \text{(B-28)}$$

De la misma forma se obtiene el valor de $\cos\beta$ en el triángulo $DD'A_1$ de la Fig. B.3.b. entonces

$$\cos\beta = \frac{(c - x)}{L_2} = \frac{(c - x)}{(L_{est} - x\cos\mathcal{H})} = (c - x)(L_{est} - x.\cos\mathcal{H})^{-1}$$

desarrollando por serie de potencias resulta.

$$\cos\beta \approx (c-x).\left[\frac{1}{L_{est}} + \frac{x.\cos\mathcal{H}}{L^2_{est}}\right] = \frac{c}{L_{est}} - \frac{x}{L_{est}} +$$

$$+ \frac{x.c.\cos\mathcal{H}}{L^2_{est}} - \frac{x^2\cos\mathcal{H}}{L^2_{est}} \qquad \text{(B-29)}$$

Tomando términos de orden x, entonces

$$\cos\beta = \frac{c}{L_{est}} - \frac{x}{L_{est}}\left(1 - \frac{c.\cos\mathcal{H}}{L_{est}}\right) \text{ pero } \cos\mathcal{H} = \frac{c}{L_{est}}$$

$$y, \operatorname{sen}\mathcal{H} = \frac{h}{L_{est}}; \quad \cos\beta = \left(1 - \frac{c}{L^2_{est}}\right)^{1/2} \text{ entonces}$$

$$\cos\beta = \cos\mathcal{H} - \frac{x}{c}.\cos\mathcal{H}\left(1 - \frac{c^2}{L^2_{est}}\right) = \cos\mathcal{H}\left(1 - \frac{x}{c}\operatorname{sen}^2\mathcal{H}\right) \quad (B-30)$$

Sustituyendo las Ecs. (B-25), (B-26), (B-28) y (B-30) en la Ec. (B-24) se tiene:

$$k(\delta_{est} - x\cos\mathcal{H})\cos\mathcal{H}.\left(1 - \frac{x}{c}\operatorname{sen}^2\mathcal{H}\right) - k\,(\delta_{est} + x.\cos\mathcal{H}).$$

$$\cos\mathcal{H}\left(1 + \frac{x}{c}\operatorname{sen}^2\mathcal{H}\right) = M\frac{d^2x}{dt^2}$$

Realizando operaciones y simplificando se tiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{M}\left(\frac{2k\delta_{est}\cos\mathcal{H}\operatorname{sen}^2\mathcal{H}}{c} + 2k\cos^2\mathcal{H}\right).x = 0 \text{ que es la}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2_n.x = 0; \text{ de donde}$$

$$w^2_n = \frac{1}{M}\left[\frac{2k.\delta_{est}.\cos\mathcal{H}\operatorname{sen}^2\mathcal{H}}{c} + 2k.\cos^2\mathcal{H}\right] \ldots. \quad (B-31)$$

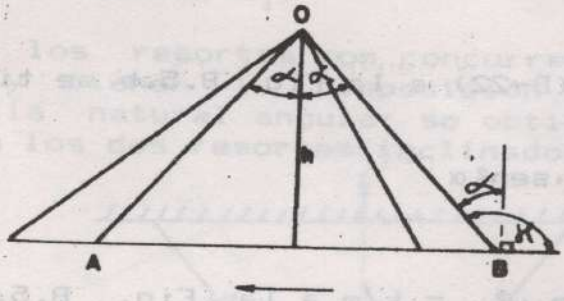
$$\text{pero } \frac{1}{L_{est}} = \frac{\cos}{c} = \frac{\operatorname{sen}\mathcal{H}}{h} \text{ y, } Mg = 2k.\delta_{est}.\operatorname{sen}\mathcal{H}$$

corresponden a la Ec. (B-23). Reemplazando en la Ec. (B-31) se tiene:

$$w^2_n = \frac{2k.\cos^2\mathcal{H}}{M} + \frac{Mg.\operatorname{sen}^2\mathcal{H}}{h.M} = \frac{2k.\cos^2\mathcal{H}}{M} + \frac{g.\operatorname{sen}^2\mathcal{H}}{h} \quad ..(B-31')$$

a pesar de que el movimiento de la barra es lateral, aquí aparece nuevamente en w^2_n, el término $g.\operatorname{sen}^2\mathcal{H}/h$ que contiene la gravedad y su efecto es análogo, al obtenido en B.1.1.

NOTA: Si se quiere que la plataforma ABCD de B.1.1, tenga un movimiento lateral y se desea obtener su frecuencia natural angular, se ve que ella es simétrica de dos en dos resortes.



$\mathcal{H} = (90+\alpha)$

Fig. B.4

Aplicando la Ec. (B-31') al movimiento de la Fig. B.4 se tiene:

$$w^2_n = \frac{2k.\cos^2\mathcal{H}}{M} + \frac{g}{h}.\operatorname{sen}^2\mathcal{H} = \frac{2k}{M}\cos^2(90+\alpha) + \frac{g}{h}\operatorname{sen}^2(90+\alpha)$$

pero

$\cos(90+\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$, y, $\operatorname{sen}(90+\alpha) = \cos\alpha$ entonces

$$w^2_n = \frac{2k}{M}.\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{g}{h}\cos^2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B-32)$$

Si los resortes no son concurrentes fuera del cuerpo sino en un punto del cuerpo, como en el caso de la Fig. B.5.a la frecuencia natural angular tanto para el movimiento vertical como lateral, por combinación de los casos ya vistos son:

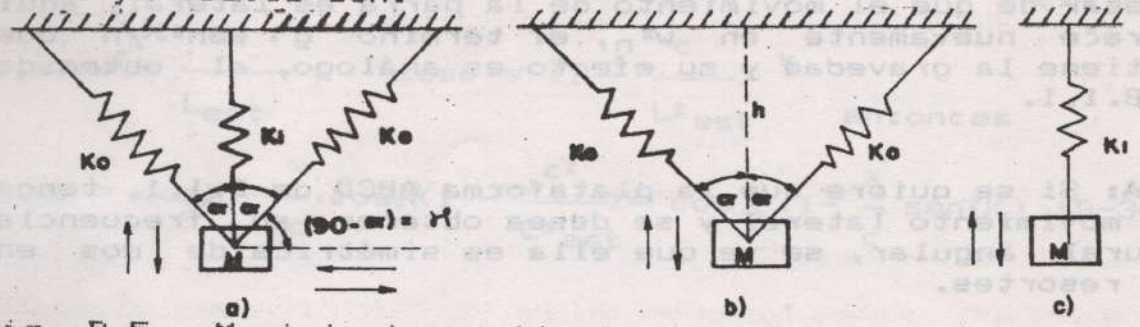


Fig. B.5. Movimiento vertical y lateral de la masa M.

Movimiento vertical

Aplicando la Ec. (B-22) a la Fig. B.5.b se tiene:

$$(w^2_n)_1 = \frac{2k_o}{M} \cdot \cos^2\alpha + \frac{g}{h} \cdot \operatorname{sen}^2\alpha$$

aplicando la ecuación $w^2_n = k/m$ a la Fig. B.5.c, se tiene:

$$(w^2_n)_2 = \frac{k_1}{M} = \frac{k_1}{M} \cdot \cos^2 0°$$

Combinando los casos de las Figs. B.5. b y c, entonces

$$w^2_n = (w^2_n)_1 + (w^2_n)_2 = \frac{2k_o}{M} \cos^2\alpha + \frac{g}{h} \operatorname{sen}^2\alpha + \frac{k_1}{M} \cos^2 0° \qquad \text{(B-33)}$$

Movimiento lateral

Aplicando la Ec. (B-31') con $H = (90 - \alpha)$ Fig. B.6.b y c. se tiene:

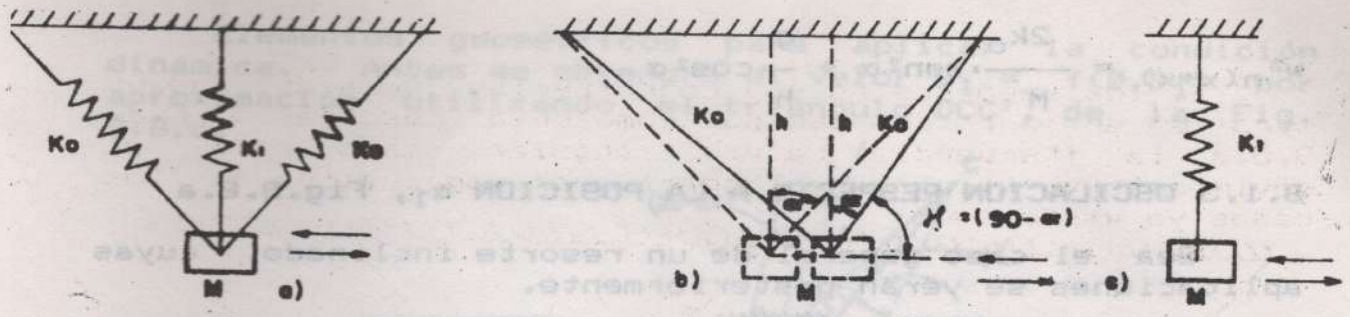


Fig. B.6.

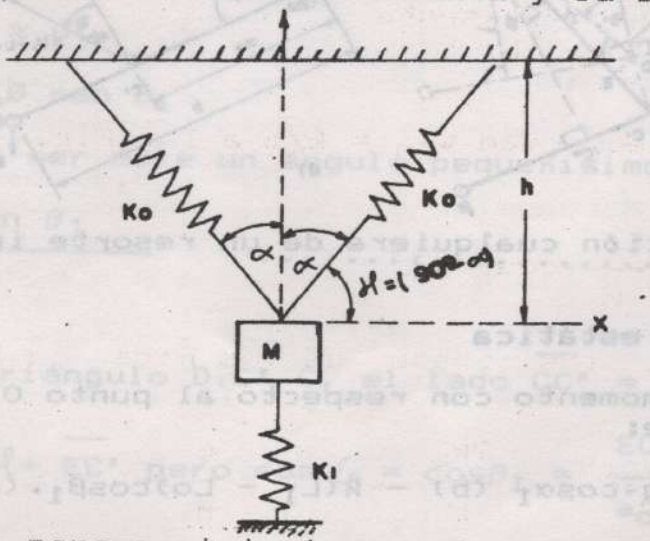
$$(w^2_n)_1 = (2k_o/M)\cos^2(90 - \alpha) + (g/h)\mathrm{Sen}^2(90 - \alpha)$$

$$(w^2_n)_2 = (k_1/M)\cos^2(90 - 0°) \text{ entonces}$$

$$w^2_n = (w^2_n)_1 + (w^2_n)_2 = (2k_o/M)\mathrm{sen}^2\alpha + (g/h)\cos^2\alpha + 0 \quad .. \quad (B\text{-}34)$$

como se observa en ésta última ecuación desaparece la acción del resorte k_1.

Si los resortes son concurrentes en un punto del cuerpo y tienen la disposición de la Fig. B.7, su frecuencia natural angular se obtiene aplicando la Ec. (B-22) a los dos resortes inclinados y la Ec. $w^2_n = k/m$.



al resorte k_1 para movimiento en el eje y; entonces

$$w^2_n(y\text{-}y) = \frac{2k_o}{M}\cdot\cos^2\alpha + \frac{g}{h}\cdot\mathrm{sen}^2\alpha + \frac{k_1}{M}$$ y para el movimiento

en el eje de x o sea lateral, la frecuencia natural angular se obtiene mediante la aplicación sucesiva de la Ec. (B-31') con $\mathcal{H} = (90° - \alpha)$, Fig. B.7, entonces

$$w^2_{n(x\to x)} = \frac{2k_o}{M}\cdot sen^2\alpha + \frac{g}{h}\cdot\cos^2\alpha$$

B.1.3 OSCILACION RESPECTO A LA POSICION α_1, Fig.B.8.a

Sea el caso general de un resorte inclinado, cuyas aplicaciones se verán posteriormente.

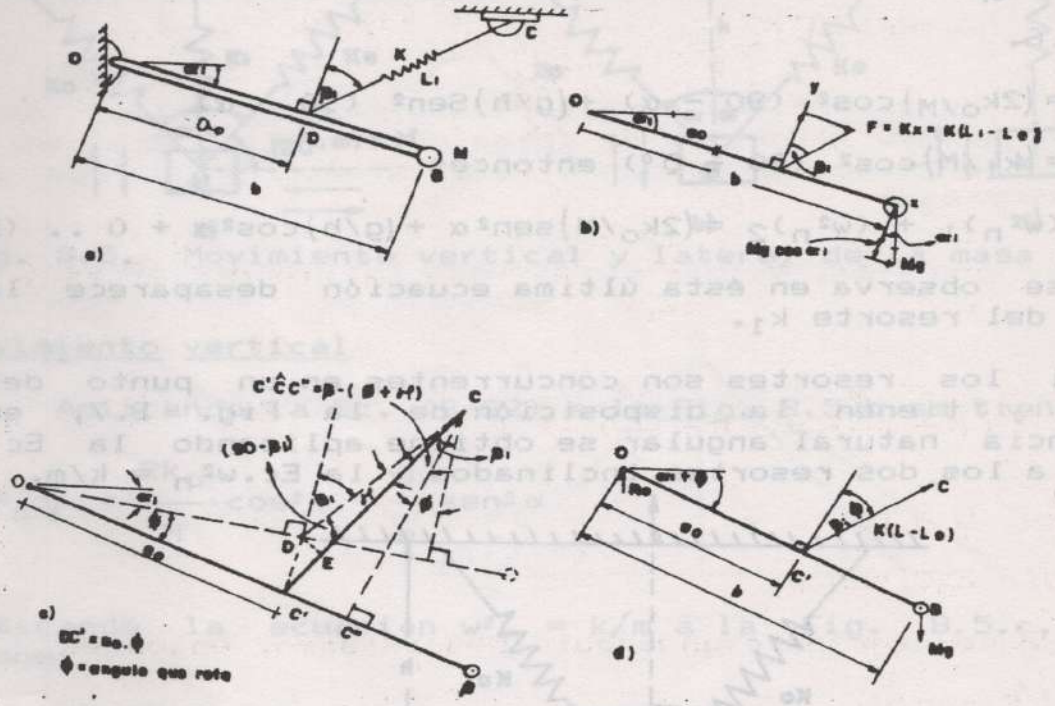


Fig. B.8 Posición cualquiera de un resorte inclinado.

Condición estática

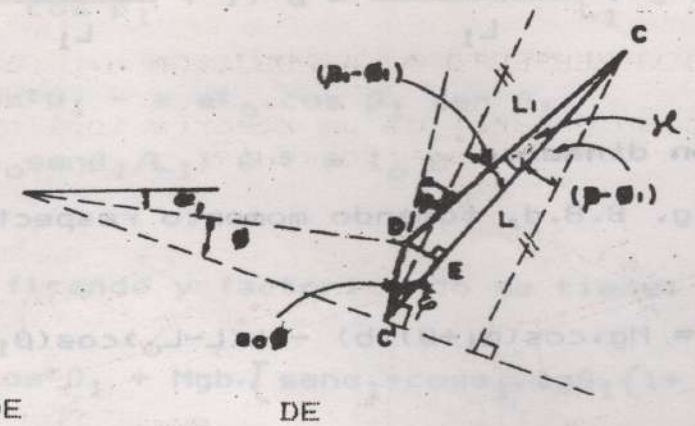
Tomando momento con respecto al punto O en la Fig. B.8.b. se tiene:

$$(+\ \Sigma.Mo = 0 = Mg.\cos\alpha_1\ (b) - k(L_1 - Lo)\cos\beta_1.(a_o) \qquad (B\text{-}35)$$

En la Fig. B.8.c aplicando los conceptos de geometría se tiene:

$\beta_1 = \mathcal{H} + C'\hat{C}.C'' + \emptyset$; entonces $C'\hat{C}.C'' = \beta_1 - (\emptyset + \mathcal{H})$; si hacemos $\emptyset + \mathcal{H} = \emptyset_1$, entonces la ecuación anterior $C'\hat{C}.C'' = \beta_1 - \emptyset_1$

Elementos geométricos para aplicar la condición dinámica. Antes se obtendrá el valor $\emptyset_1 = f(\emptyset, \beta_1)$ por aproximación utilizando el triángulo DCC', de la Fig. B.8.c.



$$\text{sen } \mathcal{H} = \frac{DE}{L_1} \; ; \; \text{sen } \mathcal{G} = \frac{DE}{a_o \emptyset} \text{ entonces } L_1 \text{ sen } \mathcal{H} = a\emptyset \text{ sen} \mathcal{G}$$

pero

$$\mathcal{G} = \beta_1 - (\mathcal{H} + \frac{\emptyset}{2}), \text{y}, (\mathcal{H} + \frac{\emptyset}{2}) << \beta_1$$

entonces $\mathcal{G} \approx \beta_1$ y

$L_1 \text{ sen } \mathcal{H} = a_o \emptyset \text{ sen } \beta_1$

sen $\mathcal{H} \approx \mathcal{H}$ por ser éste un ángulo pequeñisimo, entonces

$$\mathcal{H} = \frac{a_o . \emptyset . \text{sen } \beta_1}{L_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(B-36)}$$

En el triángulo D.C'. C, el lado $\overline{CC'} = L = \overline{CE} + \overline{EC'}$

$CC' = L_1 \cdot \cos \mathcal{H} + \overline{EC'}$ pero $\cos \mathcal{G} = \cos\beta_1 = \frac{EC'}{a_o \emptyset}$ entonces

$L = L_1 \cos \mathcal{H} + a_o \emptyset . \cos\beta_1$ pero $\cos \mathcal{H} \approx 1$ por lo tanto:

$$L = L_1 + a_o \emptyset . \cos\beta_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(B-37)}$$

Reemplazando la Ec. (B-36) en la ecuación de la forma $\emptyset_1 = (\emptyset + \mathcal{H})$ se tiene la ecuación

$$\phi_1 = (\phi + \mathcal{H}) = \phi + \frac{a_o \phi . \operatorname{sen} \beta_1}{L_1} = \phi \left(1 + \frac{a_o . \operatorname{sen} \beta_1}{L_1}\right) \qquad \text{(B-38)}$$

Condición dinámica

En la Fig. B.8.d, tomando momento respecto al punto O se tiene:

$$\circlearrowleft + \Sigma Mo = I_o \ddot{\phi} = Mg.\cos(\alpha_1 + \phi)(b) - k(L - L_o)\cos(\beta_1 - \phi_1)(a_o) \qquad \text{(B-39)}$$

Sustituyendo la Ec. (B-37) en la Ec. (B-39) y desarrollando la función $\cos(\alpha_1 + \phi)$ se tiene:

$$Mgb\cos\alpha_1 \cos\phi - Mgb\operatorname{sen}\alpha_1 (\operatorname{Sen} \phi) - k(L_1 + a_o \phi \cos\beta_1 - L_o) .$$

$$. a_o \cos(\beta_1 - \phi_1) = I_o \ddot{\phi} \qquad \text{(B-40)}$$

Sustituyendo la Ec. (B-35) en la Ec. (B-40) se tiene:

$$Mgb\cos\alpha_1 \cos\phi - Mgb\operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\phi - \frac{Mgb\cos\alpha_1 a_o \cos(\beta_1 - \phi_1)}{a_o \cos \beta_1}$$

$$- k . a^2{}_o . \phi . \cos \beta_1 . \cos(\beta_1 - \phi_1) = I_o \ddot{\phi} \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{(B-41)}$$

pero $\cos \phi \approx 1$; $\operatorname{sen}\phi \approx \phi$; $\cos\phi_1 \approx 1$;

$\operatorname{sen} \phi_1 \approx \theta_1 \approx \phi \left(1 + \frac{a_o \operatorname{sen}\beta_1}{L_1}\right)$ todo lo anterior por ser ϕ, y ϕ_1 ángulos pequeñísimos.

Reemplazando en la Ec. (B-41) entonces

$$Mgb\cos\alpha_1 - Mgb\phi\operatorname{sen}\alpha_1 - \frac{Mgb\cos\alpha_1 \cos\beta_1}{\cos \beta_1} -$$

$$- \frac{Mgbcos\alpha_1 sen\beta_1}{cos\,\beta_1} \cdot \phi \left(1 + \frac{a_o sen\beta_1}{L_1} \right)$$

$$- k.a^2{}_o \phi . cos^2\beta_1 - k.a^2{}_o . cos\,\beta_1\, sen\,\beta_1 \cdot$$

$$(1 + a_o sen\beta_1 / L_1)\, \phi^2 = I_o \ddot{\phi}$$

Simplificando y factorizando se tiene:

$$I_o \ddot{\phi} + \left[ka^2{}_o cos^2\beta_1 + Mgb. \left\{ sen\alpha_1 + cos\alpha_1 . tg\beta_1 \left(1 + \frac{a_o . sen\,\beta_1}{L_1} \right) \right\} \right] \phi$$

$$= ka^2{}_o . cos\,\beta_1 . sen\,\beta_1 (1 + a_o . sen\beta_1 / L_1)\, \phi^2 \qquad (B-41')$$

cuya ecuación es del tipo $\frac{d^2x}{dt^2} + w^2{}_n = C_o$ de donde

$$w^2{}_n = \frac{\left\{ ka^2{}_o cos^2\beta_1 + Mgb. \left[sen\alpha_1 + cos\alpha_1 tg\beta_1 \left(1 + \frac{a_o\ sen\ \beta_1}{L_1} \right) \right] \right\}}{I_o} \cdot (B-42)$$

pero I_o es el momento de inercia de la masa de un cuerpo respecto a un eje que pasa por el punto O entonces

$I_o = \int \rho^2 . m = k^2 . m = b^2 . m$; por lo tanto,

$$w^2{}_n = ka^2{}_o . cos^2\beta_1 / Mb^2 + (g/b) \left[sen\ \alpha_1 + cos\alpha_1 tg\beta_1 . \left(1 + a_o . \frac{sen\ \beta_1}{L_1} \right) \right]$$

(B-43)

La Ec. (B-42) es importante porque nos permite la descripción de diferentes formas o configuraciones.

B.1.4 MOVIMIENTO DE RESORTES EN UN PLANO HORIZONTAL

Consideremos una placa triangular, de masa M, situada sobre una mesa horizontal, con la finalidad de determinar la frecuencia natural angular de las vibraciones en la dirección AA_1.

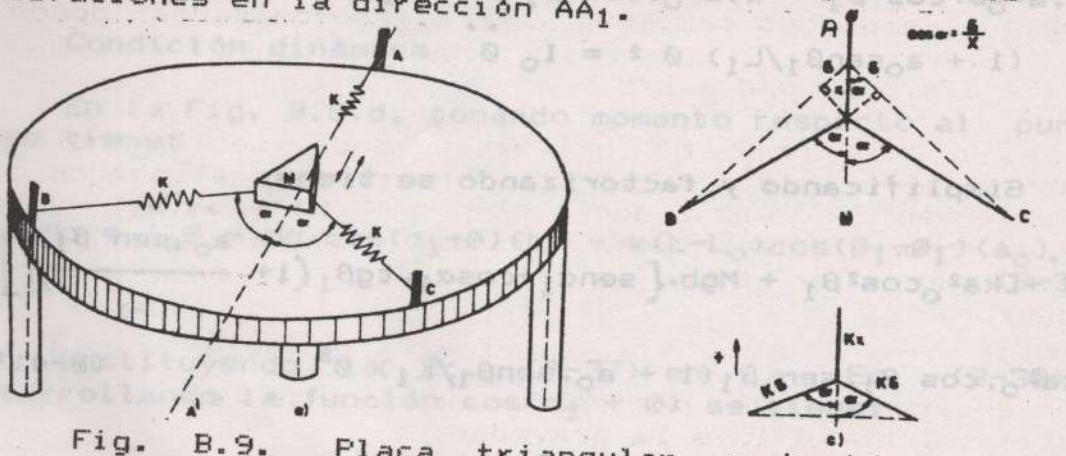


Fig. B.9. Placa triangular sostenida mediante resortes, en un plano horizontal.

En la Fig. B.9.c de acuerdo a la segunda Ley de Newton se tiene:

$$M \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k.x - 2.k.\delta.\cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B-44)$$

pero $\delta = x.\cos\alpha_1$, reemplazando en la Ec. (B-44) se tiene:

$$M \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k.x - 2.k.x.\cos^2\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B-45)$$

$$\text{entonces} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{2.k.\cos^2\alpha}{M} + \frac{k}{M} \right).x = 0 \quad \ldots\ldots (B-45')$$

de donde

$$w^2_n = \frac{(2.k.\cos^2 \alpha) + k}{M} = \frac{2k}{M}\cos^2 \alpha + \frac{k}{M} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B\text{-}46)$$

Podría considerarse directamente éste caso como una combinación de dos casos ya vistos y demostrados, donde

$$w^2_n = 2.k.\cos^2 \alpha/M + k/M$$

en esta ecuación, el primer sumando de la derecha representa la acción de los dos resortes no alineados con el eje AA_1 ubicados sobre el plano horizontal, y el segundo sumando representa la acción del resorte alineado con dicho eje, sobre el mismo plano y en la parte superior.

Obsérvese que por ser un movimiento en el plano horizontal no influye la gravedad.

B.1.5 MOVIMIENTO DE UN RESORTE EN UN PLANO INCLINADO.

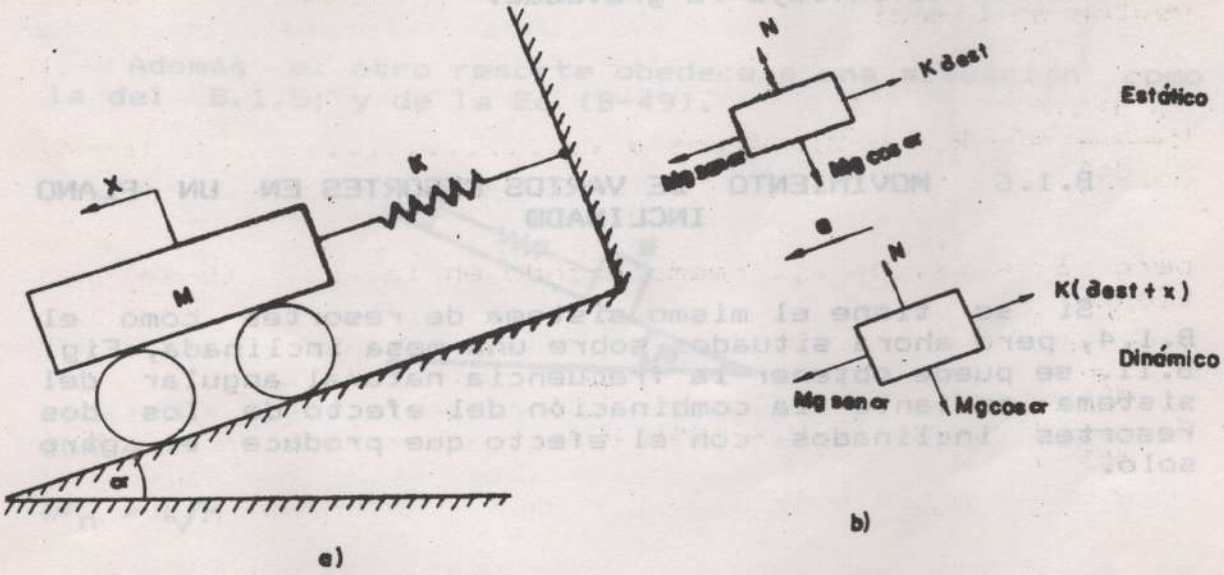


Fig. B.10. Movimiento de un cuerpo sostenido por un resorte, en un plano inclinado.

En la Fig. B.10.b se tiene:

$$Mg.\text{sen}\,\alpha = k.\delta_{est} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B\text{-}47)$$

$$Mg.\text{sen}\,\alpha - k\,(\delta_{est} + x) = M.\frac{d^2x}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B\text{-}48)$$

Combinando las Ecs. (B-47) y (B-48) se tiene:

$$k.\delta_{est} - k\,(\delta_{est} + x) = M.\frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{entonces}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (k/M).x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B\text{-}48')$$

de donde

$$w^2_n = k/M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B\text{-}49)$$

A pesar de existir cambio en la posición vertical no hay variación en la dirección del resorte, de ahí que en la solución no influya la gravedad.

B.1.6 MOVIMIENTO DE VARIOS RESORTES EN UN PLANO INCLINADO

Si se tiene el mismo sistema de resortes como el B.1.4, pero ahora situados sobre una mesa inclinada, Fig. B.11. se puede obtener la frecuencia natural angular del sistema mediante la combinación del efecto de los dos resortes inclinados con el efecto que produce el otro solo.

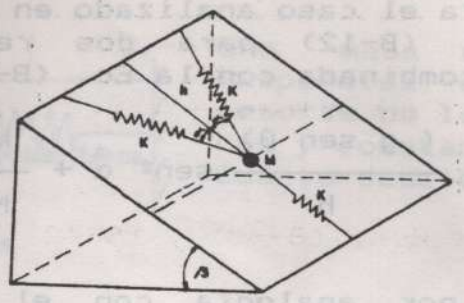
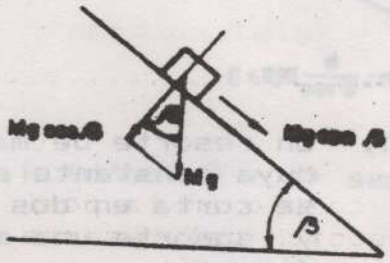
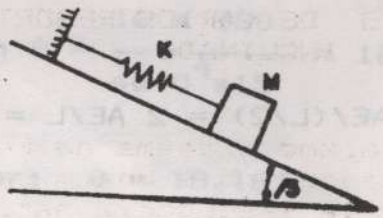


Fig. B.11. Movimiento de un cuerpo sostenido por varios resortes, en un plano inclinado.

Los dos resortes inclinados son afectados por la componente de la gravedad así:



Además el otro resorte obedece a una situación como la del B.1.5; y de la Ec (B-49).



donde

$w^2_n = k/M$

Entonces para el caso analizado en la Fig. B.11 y aplicando la Ec. (B-12) para dos resortes, con la componente de g, combinada con la Ec. (B-49), se tiene:

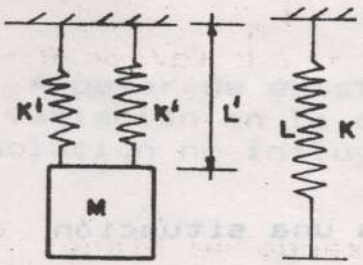
$$w^2_n = \frac{2k}{M}\cdot\cos^2\alpha + \frac{(g\ \text{sen}\ \beta)}{h}\cdot\text{sen}^2\alpha + \frac{k}{M} \quad \ldots\ldots\ (B\text{-}50)$$

obsérvese que por analogía con el principio de correspondencia, cuando particularizamos y consideramos a $\beta = 90°$ (caso en posición vertical) y $\beta = 0°$ (caso en posición horizontal), la Ec. (B-50) coincide con lo ya demostrado, Ecs. (B-33) y (B-46).

$$w^2_n = (2k/M).\cos^2\alpha + (g/h)\,\text{sen}^2\alpha + k/M \quad \ldots\ldots\ (B\text{-}50')$$

$$w^2_n = (2k/M)\cos^2\alpha + k/M \quad \ldots\ldots\ (B\text{-}50'')$$

Problemas de aplicación.



1.- Un resorte de masa depreciable cuya constante es k = 50 New/m, se corta en dos partes iguales y soporta una masa m según la figura.
La masa vibrará con una frecuencia de 1,1 ciclo/seg. Cuál es el valor de la masa?

Solución

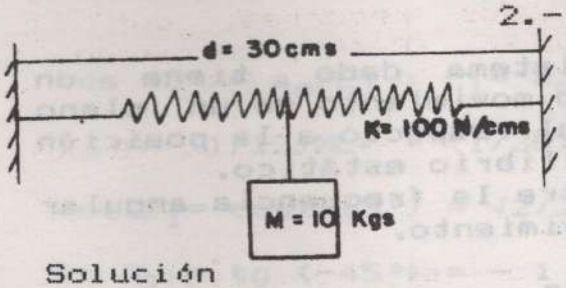
$L' = L/2;\ k' = AE/L' = AE/(L/2) = 2\,AE/L = 2k$

Al estar los dos resortes en paralelo, la constante equivalente será: $keq = k' + k' = 2k' = 2(2k) = 4k$

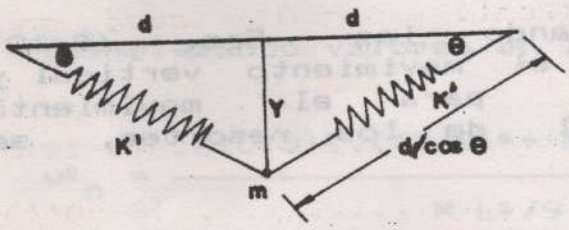
como $w^2_n = k_{eq}/m = 4k/m$, y, $w_n = 2\pi.f$, entonces

$$m = \frac{4k}{w^2_n} = \frac{4k}{4\pi^2 f^2} = \frac{k}{\pi^2 f^2} = \frac{50}{\pi^2 (1,1)^2} = \underline{4,19\ \text{Kgs.}}$$

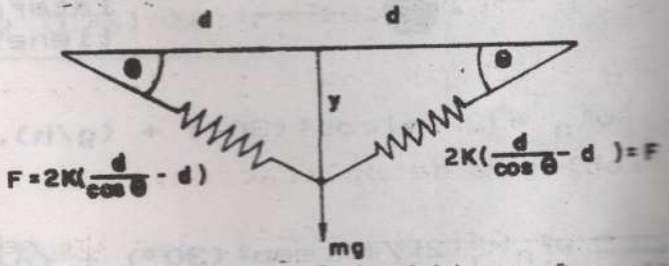
2.- Una masa de 10 Kgs. está suspendida de la mitad de un resorte de longitud natural 30 cms y constante k =100 New/cms. Cuánto desciende la masa?



Solución



Al dividir el resorte en dos fracciones iguales, la constante de cada mitad es 2k, entonces:



$F = k\ x$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0 = 2.k.(d/\cos\theta - d)\ \text{sen}\ \theta + 2\ k\ (d/\cos\theta - d)$

$\text{sen}\ \theta = m\ g$

así $4.k.(d/\cos\theta - d)\ \text{sen}\ \theta = m\ g$

$\text{tg}\ \theta - \text{sen}\ \theta = mg/4kd$ Reemplazando se tiene:

$$\text{tg}\ \theta - \text{sen}\ \theta = \frac{10 * 980}{4*10^4*15} = 163{,}33 * 10^{-4} = 0.0163$$

Por prueba y error; $\theta = 18{,}16°$

$\text{tg}\ \theta = y/d$ entonces $y = d.\text{tg}\ \theta = 15.\text{tg}\ 18{,}16°$

$y = 4{,}92$ cms. (Descenso)

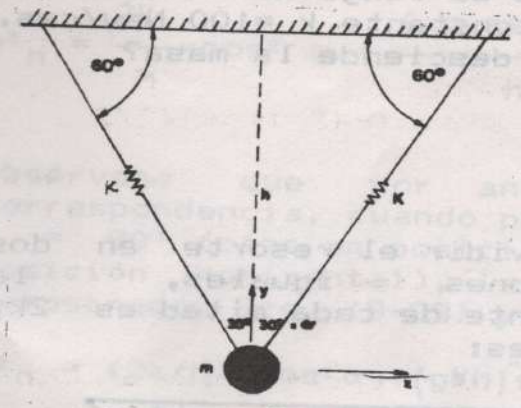
Según el resultado anterior, cada fracción f_i de un resorte tendrá una constante.

$K_i = k/f_i$ así:

Si $f_i = 1/2$; $k' = k/(1/2) = 2k$

Si $f_i = 1/3$; $k'' = k/(1/3) = 3k$ y así sucesivamente

3.- El sistema dado tiene un pequeño movimiento en un plano vertical respecto a la posición de equilibrio estático. Encuentre la frecuencia angular del movimiento.



Solución.

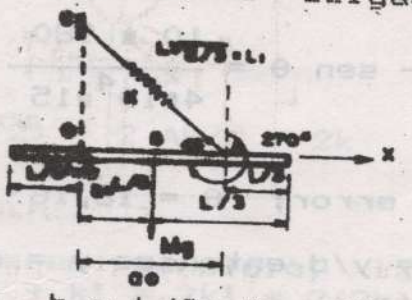
Empleando las Ecs. (B-12) para el movimiento vertical y (B-32) para el movimiento lateral de los resortes, se tiene:

$$\uparrow \quad w^2_n = (2k/m)\cos^2(30°) + (g/h).\,\mathrm{sen}^2(30°) = 3k/2m + g/4h$$

$$\rightleftharpoons \quad w^2_n = (2k/m).\,\mathrm{sen}^2(30°) + (g/h)\cos^2(30°) = k/2m + 3g/4h$$

Aplicaciones de la ecuación general para resortes inclinados.

4.- Oscilación de una barra uniforme delgada respecto de la posición horizontal.



$a_o = L/6 + (L/2-L/3) = L/3$; $b = L/6$; $\beta_1 = 270° + 45° = 315°$;

$\alpha_1 = 0°$ y $\beta_1 = -45°$

β = ángulo formado entre la perpendicular a la barra en el punto de aplicación del resorte y el resorte, en sentido horario o antihorario.

α = ángulo formado entre la barra y el eje de x, en sentido horario.

$\cos 45° = a_o/L_1$; $L_1 = a_o/\cos 45° = L\ (\sqrt{2}/3)$

$I_o = (1/12)ML^2 + (1/36)\ ML^2 = (1/9)\ ML^2$

$\cos \beta_1 = \cos(315°) = \sqrt{2}/2$; $\operatorname{sen} \beta_1 = \operatorname{sen}(-45°) = -\sqrt{2}/2$

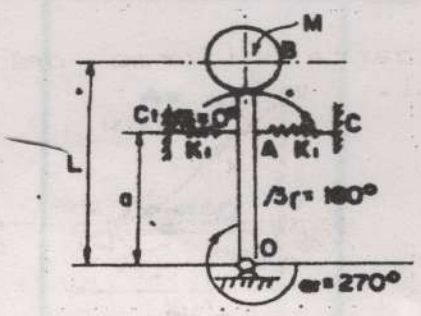
$\operatorname{tg} \beta_1 = \operatorname{tg}(-45°) = -1$

Reemplazando valores en la Ec. (B-42) se tiene:

$$w^2_n = \frac{k(L/3)^2\ (\sqrt{2}/2)^2 + Mg\ (L/6)\ (0 - 1\ (1 - 3L.2/6L.2)}{M\ L^2/9} =$$

$$w^2_n = \frac{\frac{1}{2}.k.L^2 - (3/4)\,MgL}{M.L^2}$$

5.- Oscilación respecto a la vertical



Una barra rígida, sin peso, de longitud L, está articulada en su extremo inferior y lleva una masa M en su extremo superior. Dos resortes, cada uno con constante k, estan asegurados a la barra a una distancia a de la articulación. Calcular la frecuencia de vibración para pequeñas oscilaciones.

Para encontrar los ángulos β, se coloca la masa M de la barra del caso general de los resortes inclinados coincidiendo con la masa M del problema a resolver.

Resorte AC: [$\beta_1 = 180°$; $\operatorname{sen} \beta_1 = 0$; $\cos \beta_1 = -1$

Resorte AC_1: [$\beta_1 = 0°$; $\operatorname{sen} \beta_1 = 0$; $\cos \beta_1 = 1$

$a_o = a$; $b = L$; $\alpha_1 = 270° = -90°$; sen $\alpha_1 = -1$; cos$\alpha_1 = 0$

Reemplazando valores en la Ec. (B.42) se tiene:

$$w^2_n = \frac{k_1 a^2 (-1)^2 + MgL(-1+0)}{ML^2} = \frac{k_1 a^2}{ML^2} - \frac{g}{L}$$ para un resorte; para los dos resortes

$$w^2_n = \frac{2.k_1.a^2}{ML^2} - \frac{g}{L}$$ si los resortes tienen k diferentes

(k_1, k_2) entonces,

$$w^2_n = \frac{a^2.(k_1 + k_2)}{ML^2} - \frac{g}{L}$$ Esta respuesta es parecida a la obtenida por S. Timoshenko en Problemas de Vibración en Ingeniería, Páginas 34 y 35, ejemplo 1, utilizando el método de la ecuación de la energía.

PROPIEDADES DE FIGURAS PLANAS

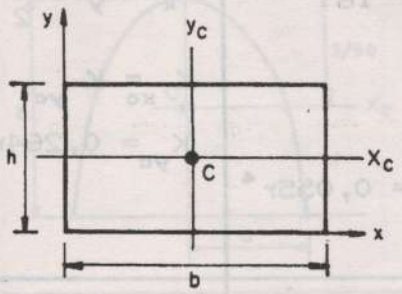
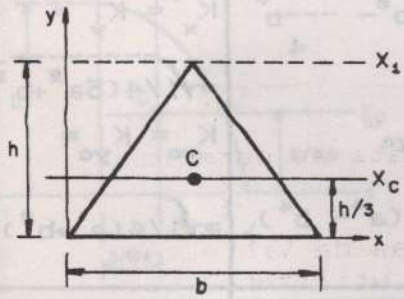
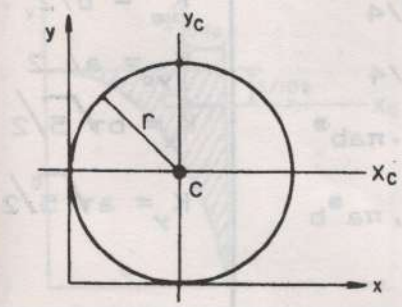
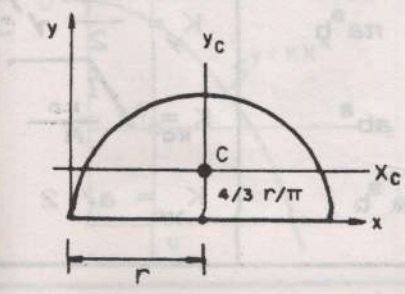
FIGURA	CENTROIDE Y AREA	MOMENTO DE INERCIA	RADIO DE GIRO
1.- RECTANGULO 	$A = bh$ $x_c = b/2$ $y_c = h/2$	$I_x = bh^3/3$ $I_y = b^3h/3$ $I_{xc} = bh^3/12$ $I_{yc} = b^3h/12$	$I = K^2 \cdot A$ $K_x = h/\sqrt{3}$ $K_y = b/\sqrt{3}$ $K_{xc} = h/\sqrt{12}$ $K_{yc} = b/\sqrt{12}$
2.- CUALQUIER TRIANGULO 	$A = bh/2$ $x_c = (a+b)/3$ $y_c = h/3$	$I_y = b^3h/12$ $I_x = bh^3/12$ $I_{xc} = bh^3/36$ $I_{yc} = bh^3/36$ $I_{x1} = bh^3/4$	$K_y = b/\sqrt{6}$ $K_x = h/\sqrt{6}$ $K_{xc} = h/\sqrt{18}$ $K_{yc} = b/\sqrt{18}$
3.- CIRCULO 	$A = \pi r^2$ $x_c = 0$ $y_c = 0$	$I_{xc} = \frac{\pi r^4}{4} = I_{yc}$ $I_x = \frac{5}{4} \cdot \pi r^4 = I_y$	$K_{xc} = \frac{r}{2}$ $K_x = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{5}$
4.- SEMICIRCULO 	$A = \frac{\pi r^2}{2}$ $x_c = 0$ $y_c = \frac{4r}{3\pi}$	$I_x = \frac{\pi r^4}{8} = I_{yc}$ $I_{xc} = 0,11r^4$ $I_y = \frac{5}{8} \cdot \pi r^4$	$K_x = \frac{r}{2} = K_{yc}$ $K_{xc} = 0,264r$ $K_y = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{5}$

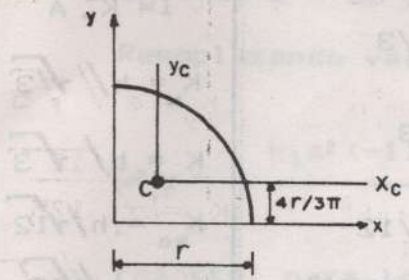
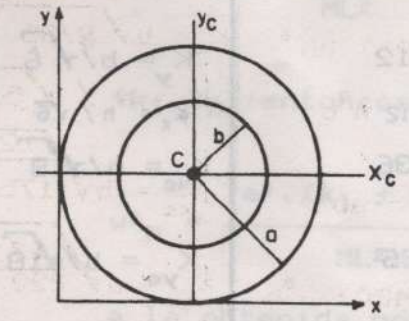
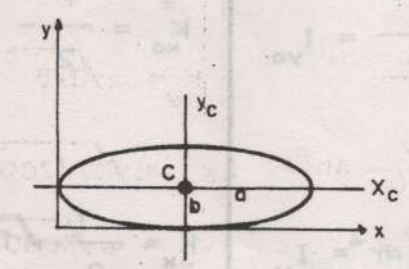
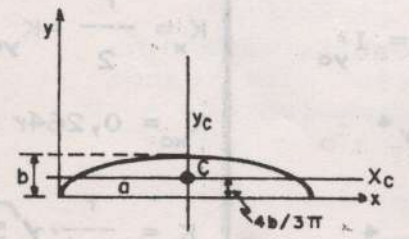
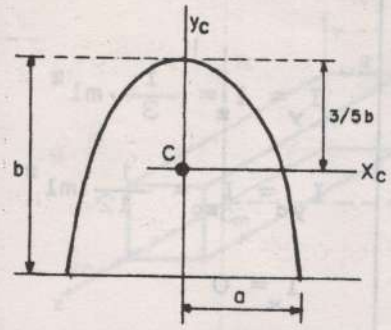
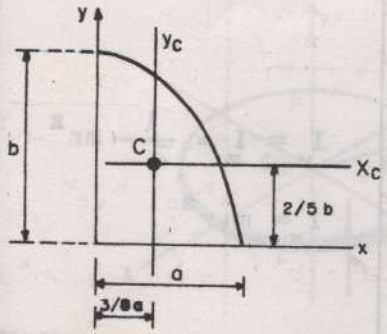
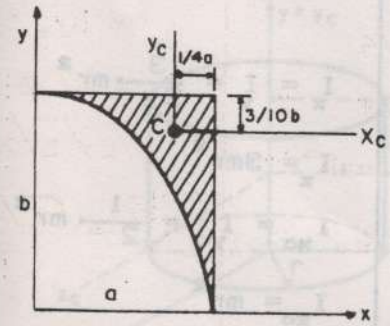
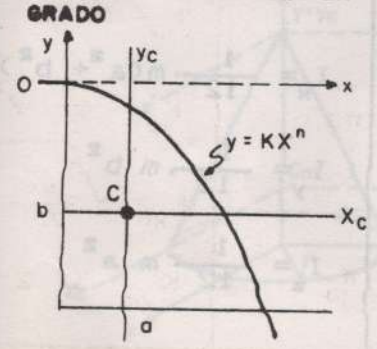
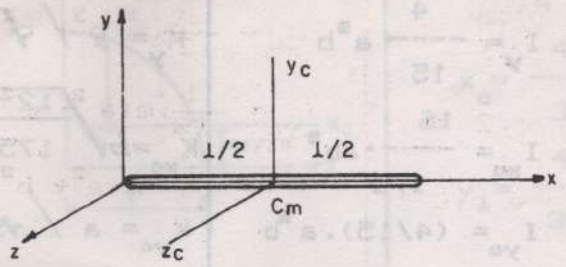
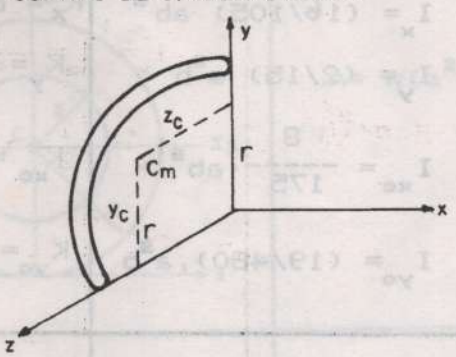
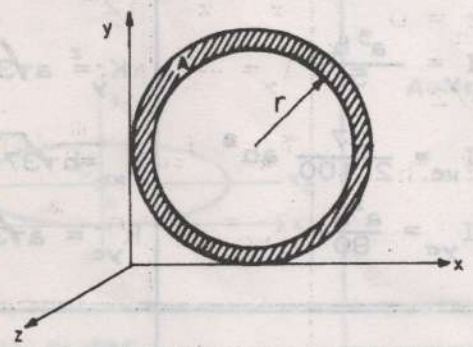
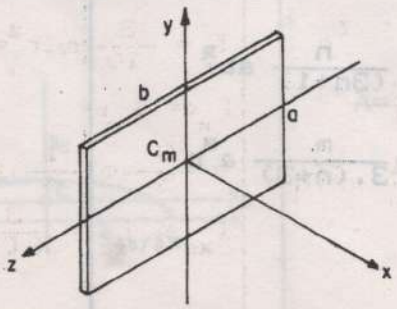
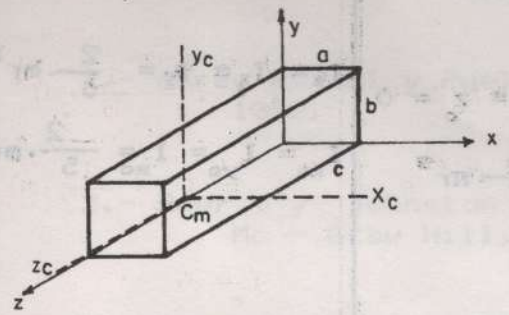
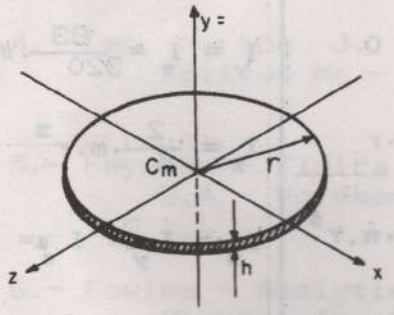
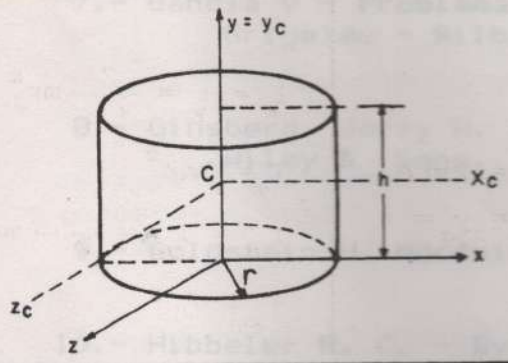
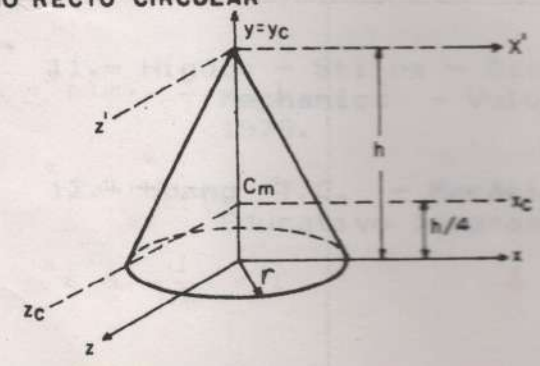
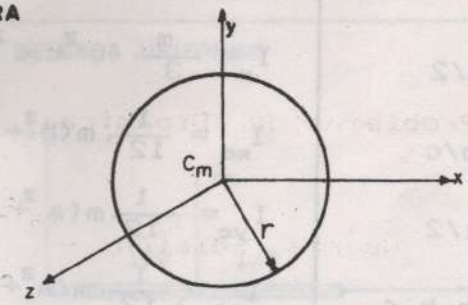
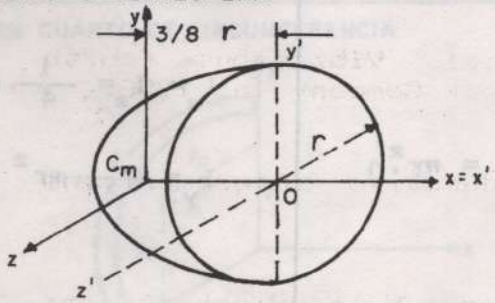
FIGURA	CENTROIDE Y AREA	MOMENTO DE INERCIA	RADIO DE GIRO
5.- CUARTO DE CIRCULO 	$A = \frac{\pi r^2}{4}$ $x_c = \frac{4r}{3\pi}$ $y_c = \frac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \frac{4\pi r^4}{16}$ $I_{xc} = I_{yc} = 0,055r^4$	$K_x = K_y = \frac{r}{2}$ $K_{xc} = K_{yc}$ $K_{yc} = 0,264r$
6.- 	$A = \pi(a^2 - b^2)$	$I_x = I_y = \frac{5}{4}\pi a^4 - \pi a^2 b^2 - \frac{\pi}{4} b^4$ $I_{xc} = I_{yc} = \frac{\pi}{4}(a^4 - b^4)$	$K_x = K_y = \sqrt{1/4(5a^2 + b^2)}$ $K_{xc} = K_{yc} = \sqrt{1/4(a + b^2)^2}$
7.- ELIPSE 	$A = \pi . a . b$	$I_{xc} = \pi ab^3/4$ $I_{yc} = \pi ba^3/4$ $I_x = (5/4) . \pi ab^3$ $I_y = (5/4) . \pi a^3 b$	$K_{xc} = b/2$ $K_{yc} = a/2$ $K_x = b\sqrt{5}/2$ $K_y = a\sqrt{5}/2$
8.- MEDIA ELIPSE 	$A = \frac{\pi ab}{2}$	$I_x = \pi ab^3$ $I_y = (5/8)\ \pi a^3 b$ $I_{xc} = 0,11\ ab^3$ $I_{yc} = \frac{\pi}{8} a^3 b$	$K_x = b/2$ $K_y = \frac{a}{2}\sqrt{5}$ $K_{xc} = \sqrt{\frac{I_{xc}}{A}}$ $K_{yc} = a/2$

FIGURA	CENTROIDE Y AREA	MOMENTO DE INERCIA	RADIO DE GIRO
9.- PARABOLA 	$A = \frac{4}{3} \cdot ab$	$I_x = \frac{32}{105} \cdot ab^3$ $I_y = \frac{4}{15} \cdot a^3 b$ $I_{xc} = \frac{16}{175} \cdot ab^3$ $I_{yc} = (4/15) \cdot a^3 b$	$K_x = b\sqrt{8/35}$ $K_y = a / \sqrt{5}$ $K_{xc} = b\sqrt{\frac{12}{175}}$ $K_{yc} = a / \sqrt{5}$
10.- MEDIA PARABOLA 	$A = \frac{2}{3} ab$	$I_x = (16/105)\ ab^3$ $I_y = (2/15)\ a^3 b$ $I_{xc} = \frac{8}{175} \cdot ab^3$ $I_{yc} = (19/480) \cdot a^3 b$	$K_x = b\sqrt{8/35}$ $K_y = a / \sqrt{5}$ $K_{xc} = b\sqrt{\frac{12}{175}}$ $K_{yc} = a\sqrt{\frac{19}{320}}$
11.- TIMPANO DE PARABOLA 	$A = \frac{1}{3} ab$	$I_x = \frac{19}{105}\ ab^3$ $I_y = \frac{a^3 b}{5}$ $I_{xc} = \frac{37}{2.100}\ ab^3$ $I_{yc} = \frac{a^3 b}{80}$	$K_x = b\sqrt{19/35}$ $K_y = a\sqrt{3/5}$ $K_{xc} = b\sqrt{37/7000}$ $K_{yc} = a\sqrt{3/80}$
12.- PARABOLA DE CUALQUIER GRADO 	$A = \frac{n}{(n+1)} ab$ $x_c = \frac{(n+1)}{2(n+2)} a$ $y_c = \frac{(n+1)}{2n+1} b$	$I_x = \frac{n}{(3n+1)}\ ab^3$ $I_y = \frac{n}{3.(n+3)}\ a^3 b$	

MOMENTOS DE INERCIAS DE MASAS EN SOLIDOS HOMOGENEOS CON FORMAS GEOMETRICAS USUALES

SOLIDO	$C_m - V$	MOMENTO DE INERCIA
BARRA DELGADA UNIFORME 	$x_c = l/2$ $V = l \cdot A$	$I_y = I_z = \frac{1}{3} \cdot ml^2$ $I_{yc} = I_{zc} = \frac{1}{12} \cdot ml^2$ $I_x = 0$
BARRA EN CUARTO DE CIRCUNFERENCIA 	$y_c = z_c = \frac{2r}{\pi}$	$I_y = I_z = \frac{1}{2} \cdot mr^2$ $I_x = m \cdot r^2$
ANILLO O ARO DELGADO 	$V = 2\pi r A$ $x_c = y_c = r$	$I_x = I_y = \frac{3}{2} \cdot mr^2$ $I_z = 3mr^2$ $I_{xc} = I_{yc} = \frac{1}{2} \cdot mr^2$ $I_{zc} = mr^2$
PLACA RECTANGULAR DELGADA 	$V = A\ b\ h$	$I_x = \frac{1}{12} \cdot m(a^2 + b^2)$ $I_y = \frac{1}{12} \cdot m\ b^2$ $I_z = \frac{1}{12} \cdot m\ a^2$

SOLIDO	C_m - V	MOMENTO DE INERCIA
PARALELEPIPEDO RECTANGULAR 	$x_c = a/2$ $y_c = b/c$ $z_c = c/2$ $v = a.b.c$	$I_x = \frac{m}{3}.(b^2 + c^2)$ $I_{xc} = \frac{1}{12}.m(b^2 + c^2)$ $I_{yc} = \frac{1}{12}.m(a^2 + c^2)$ $I_{zc} = \frac{1}{12}.m(a^2 + b^2)$
PLACA CIRCULAR DELGADA 	$v = \pi r^2.h$	$I_x = I_z = \frac{1}{4}.mr^2$ $I_y = \frac{1}{2}.mr^2$
CILINDRO RECTO CIRCULAR 	$x_c = z_c = 0$ $y_c = h/2$ $v = \pi.r^2.h$	$I_x = I_z = \frac{m}{12}(3r^2+4h^2)$ $I_y = \frac{1}{2}.m.r^2$ $I_{xc} = I_{zc} = \frac{m}{12}(3r^2+h^2)$ $I_{yc} = \frac{1}{2}.m.r^2$
CONO RECTO CIRCULAR 	$x_c = 0 = z_c$ $y_c = \frac{h}{4}$ $v = \frac{1}{3}\pi r^2.h$	$I_x = I_z = \frac{m}{20}(3r^2+2h^2)$ $I_y = \frac{3}{10}.m.r^2 = I_{yc}$ $I_{x'} = I_{z'} =$ $= \frac{3}{5}.m(\frac{1}{4}.r^2 + h^2)$ $I_{xc} = I_{zc} = \frac{3}{80}m(4r^2+h^2)$

SOLIDO	$C_m - V$	MOMENTO DE INERCIA
ESFERA 	$x_c = y_c = z_c = 0$ $V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} \cdot mr^2$ $I_{xc} = I_{yc} = I_{zc} = \frac{2}{5} \cdot mr^2$
HEMISFERIO O SEMIESFERA 	$x_c = z_c = 0$ $y_c = \frac{3}{8} \cdot r$ $V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$	$I_y = I_z = \frac{83}{320} \cdot m \cdot r^2$ $I_x = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2$ $I_{x_1} = I_{y_1} = I_{z_1} = \frac{2}{5} mr^2$

BIBLIOGRAFIA

1.- Abreu Rafael y Puello Ramón - **Problemas de Dinámica** 1982.

2.- Beer y Johnston - **Dinámica** - Cuarta Edición - Mc - Graw Hill. 1985.

3.- Branson, L.K - **Dynamics** - Simon and Schuster. New York.

4.- Den Hartog J. P. **Mechanical Vibrations** Fourth Edition Mc - Graw Hill Book Company Inc 1956.

5.- Feynman - **Física** - Fondo Educativo interamericano S.A - Volúmen I - 1971.

6.- Fowles - **Analytical Mechanics** - Holt, Rinehart and Winston Inc N.Y.

7.- Gandía V - **Problemas de Mecánica y Termología** A.G. Grijelmo - Bilbao.

8.- Ginsberg Jerry H. and Genin Joseph - **Dynamics** John Wiley & Sons. 1977.

9.- Goldstein H. **Mecánica Clásica.** Editorial Aguilar.

10.- Hibbeler R. C. - **Dynamics** - 2nd Edition - Macmillan Publishing Co. 1978.

11.- Higdon - Stiles - Davis - Evces - Weese -**Engineering Mechanics** - Volume II - Dynamics Prentice Hall. 1979.

12.- Huang T.C. - **Mecánica para ingenieros** - Fondo Educativo Interamericano- S.A. 1975.

13.- Irving H. Shames - **Engineering Mechanics** - Volumen II Dynamics - Third Edition - Prentice Hall. 1.979.

14.- Jacobsen S. Ludik and Aires Robert - **Engineering Vibrations** - Editorial Mc - Graw Hill Book Company Inc. 1958.

15.- Macduff, J. N and Curreri J.R. **Vibration Control** Mc Graw Hill Book Company 1.958.

16.- Marcelo Alonso - Finn J. Edward - **Física** - Volúmen I Mecánica - Fondo Educativo Interamericano S.A. 1.967.

17.- Merian J.L. **Dinámica.** 2da. Edición - John Wiley & Sons 1.976.

18.- Mc. Lean Nelson - **Mecánica Técnica** Schaum's Outline Series - 1.971.

19.- Nara Harry R. **Mecánica vectorial para Ingenieros.** Volúmen II. Dinámica. John Wiley & Sons 1.962.

20.- Paz Mario - **Structural Dynamics** - Theory and Computation - Van Nostrand Reinhold Company 1.980.

21.- Puello R, Ramón. **Constantes equivalentes de resortes lineales y algunas analogías** - Trabajo de ascenso. 1985.

22.- Resnick - Halliday - **Physics** - Toppan Company Tokio.

23.- Sandor Bela I - **Engineering Mechanics** - Prentice Hall Inc 1.978.

24.- Sears - Zemansky - **Física** - Aguilar 1.972.

25.- Seto Willian W. **Vibraciones Mecánicas**- Mc. Graw Hill 1.970.

26.- Singer Ferdinand L. - **Mecánica para Ingenieros.** Dinámica Tercera Edición. Editorial Harla S.A. 1977.

27.- Steidel Robert F. Jr. - **An Introduction to Mechanical Vibrations** - John Willey & Sons - Inc 1.979.

28.- Spiegel M. R. **Mecánica Teorica.** Mc. Graw Hill 1976.

29.- Thomson T. Willian - **Theory of Vibrations With Applications** - Prentice Hall 1.972.

30.- Timoshenko - Young E. - **Mechamics** - Mc. Graw Hill Tokio.

31.- Timoshenko S. and. Youmg D. H- Weaver- **Problemas de Vibraciones en Ingeneria**- Compañia Editorial Continental - S.A. 1956.

32.- Vera Izquierdo Santiago - **Mecánica Racional.** Segunda Edición - Ediciones Vega 1.980.

33.- Webster - A. G. **The Dynamics of Particles** - Dover Publications. N. Y.

34.- Zafiratos Chris D. **Physics.** Second. Edition Johns Willey & Sons- 1.985.

Sistema de Unidades

Tipo	Sistema	Longitud	Masa	Tiempo	Fuerza
Absoluto	S.I (M.K.S) Sistema Internacional de unidades	m metros	Kg kilogramo	s segundo	N Newton $kg.m/s^2$
Gravitacional	L.P.S gravitacional Inglés	P pie	Slug $\frac{lbs.s^2}{pie}$	s segundo	lb libra

M.K.S = metro. kilogramo. segundo (Unidades fundamentales)
L.P.S = libra. pies. segundo (Unidades fundamentales)
N y slug = Unidades derivadas

Prefijos. S.I

Prefijo	Simbolo	Factor de multiplicación
Giga	G	10^9
Mega	M	10^6
Kilo	K	10^3
centi	c	10^{-2}
mili	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}

Unidades y factores de conversión

Cantidad física	unidad de medida (L.P.S)	Para convertir (L.P.S) al (S.I) multiplíquense las unidades del (L.P.S) por:	unidad de medida (S.I)
aceleración	pie/s^2	0,3048	m/s^2
area	pie^2	0,0929	m^2
Cantidad de movimiento	lb.s	4,4482	kg.m/s
Densidad	lbs masa/pie^3	16,0187	kg/m^3
Energía, Trabajo	lb. pie	1,3559	J(julio)
Fuerza	lb	4,4482	N
Impulso	lb.s	4,4482	N.s
Longitud	pie	0,3048	m
Masa	lbmasa	0,4536	kg
	slug	14,59	kg
Momento de una fuerza	lb.pie	1,3559	N.m
Momento de inercia de una masa	lb.pie.s^2	1,3559	kg.m^2
Potencia	lb.pie/s	1,3559	W(vatios)
Velocidad	pie/seg	0,3048	m/s
Volumen	pie^3	0,02832	m^3